WWW.RIAZISARA.IR

سایت ریاضی سرا

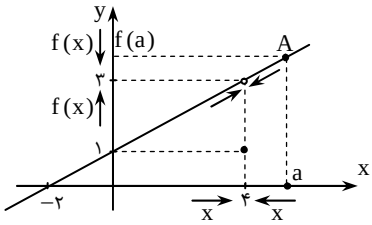
# حد و پیوستگی

## ۳-۱: مفاهیم مقدماتی حد

با مفهوم حد و چگونگی محاسبه‌ی آن در سال گذشته در درس حسابان آشنا شده‌اید. در کتاب دیفرانسیل، ما به صورت دقیق‌تر و با زبان ریاضی با این مفهوم مواجه می‌شویم و در توابعی خاص‌تر آن را بررسی خواهیم کرد.

**تعریف حد (۱):** فرض کنید تابع $f$ در یک همسایگی محذوف نقطه‌ی $x=a$ تعریف شده باشد. می‌گوییم حد تابع $f$ در $x=a$ برابر $L$ است (و می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$)، اگر جمله‌ی زیر درست باشد:

مقدار تابع $f$ را به عدد $L$ بتوانیم هر قدر که می‌خواهیم نزدیک کنیم، به‌شرط آن‌که مقدار $x$ را به عدد $a$ به اندازه‌ی کافی نزدیک کرده باشیم.




**مسأله‌ی (۱):** تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{۱}{۲}x+۱ & x\neq ۴\\ ۱ & x=۴\end{cases}$ مفروض است.

**الف) مقدار $\lim\limits_{x\to ۴} f(x)$ چقدر است؟**

**ب) اگر بخواهیم $|f(x)-۳|<۱$، باید $x$ را به چه اندازه‌ای به ۴ نزدیک کنیم؟ برای $|f(x)-۳|<۰/۰۱$ چقدر؟**

**حل:** الف) با توجه به نمودار تابع، می‌دانیم وقتی مقدار $x$ به عدد ۴ نزدیک می‌شود (در شکل با $x=a$ نشان داده‌ایم)، روی نمودار نقطه‌ی $A$ به سمت نقطه‌ی توخالی نزدیک می‌شود و متناظر آن، روی محور عرض‌ها مقدار $f(a)$ به ۳ نزدیک می‌شود. پس: $\lim\limits_{x\to ۴} f(x)=۳$.

ب) می‌دانیم برای $x\neq ۴$، ضابطه‌ی تابع $f(x)=\frac{۱}{۲}x+۱$ است. شرط $|f(x)-۳|<۱$ را به زبان ریاضی (برای $x\neq ۴$) می‌نویسیم:

$$|f(x)-۳|<۱ \Leftrightarrow |\tfrac{۱}{۲}x+۱-۳|<۱ \Leftrightarrow |\tfrac{۱}{۲}x-۲|<۱ \Leftrightarrow \tfrac{۱}{۲}|x-۴|<۱ \Leftrightarrow |x-۴|<۲$$

مشاهده می‌کنید که اگر $|x-۴|<۲$ (که چون $x\neq ۴$، بهتر است آن را به شکل $۰<|x-۴|<۲$ بنویسیم)، آن‌گاه $|f(x)-۳|<۱$. از بحث همسایگی می‌دانید شرط $۰<|x-۴|<۲$ به‌معنی $x\in(۲,۶)-\{۴\}$ است. یعنی اگر $x$ در همسایگی محذوف نقطه‌ی ۴ به شعاع ۲ قرار بگیرد، آن‌گاه $f(x)$ در همسایگی نقطه‌ی ۳ به شعاع ۱ قرار خواهد گرفت.

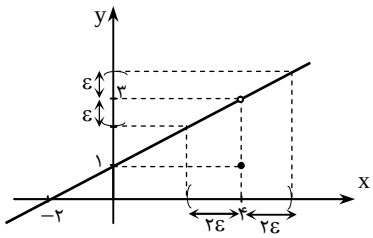
برای $|f(x)-۳|<۰/۰۱$ نیز می‌توانیم بحث مشابهی داشته باشیم: (برای $x\neq ۴$)

$$|f(x)-۳|<۰/۰۱ \Leftrightarrow |\tfrac{۱}{۲}x+۱-۳|<۰/۰۱ \Leftrightarrow |\tfrac{۱}{۲}x-۲|<۰/۰۱ \Leftrightarrow \tfrac{۱}{۲}|x-۴|<۰/۰۱ \xrightarrow{x\neq ۴} ۰<|x-۴|<۰/۰۲$$

پس اگر $x$ در همسایگی محذوف نقطه‌ی ۴ به شعاع ۰/۰۲ قرار بگیرد، $f(x)$ در همسایگی نقطه‌ی ۳ به شعاع ۰/۰۱ قرار خواهد گرفت.

**مسأله‌ی (۲):** در مسأله‌ی (۱)، می‌دانیم اگر $۰<|x-۴|<\delta$، آن‌گاه $|f(x)-۳|<\varepsilon$. چه رابطه‌ای بین $\delta$ و $\varepsilon$ برقرار است؟

**حل:** کافی است شرط‌ها را به زبان ریاضی به‌هم تبدیل کنیم: $|f(x)-۳|<\varepsilon \Leftrightarrow |\tfrac{۱}{۲}x+۱-۳|<\varepsilon \Leftrightarrow \tfrac{۱}{۲}|x-۴|<\varepsilon \Leftrightarrow |x-۴|<۲\varepsilon$




معنی جمله‌های بالا این است که برای $x\neq ۴$، دو نامساوی $|x-۴|<۲\varepsilon$ و $|f(x)-۳|<\varepsilon$ معادل‌اند. پس اگر $\delta\leq ۲\varepsilon$، آن‌گاه از $۰<|x-۴|<\delta$، می‌توانیم $|f(x)-۳|<\varepsilon$ را نتیجه بگیریم. در نمودار نیز نتایج فوق را به شکل هندسی نشان داده‌ایم. همان‌طور که مشاهده می‌کنید اگر $x$ در فاصله‌ای کم‌تر از $۲\varepsilon$ از عدد ۴ قرار بگیرد (یعنی داخل فاصله‌ی مشخص شده روی محور $x$ها)، آن‌گاه $f(x)$ در فاصله‌ی کم‌تر از $\varepsilon$ از عدد ۳ قرار می‌گیرد.

با توجه به دو مثال قبل تعریف حد را به زبان ریاضی چنین می‌توان بیان کرد:

**تعریف حد (۲):** فرض کنید تابع $f$ در یک همسایگی محذوف نقطه‌ی $x=a$ تعریف شده باشد. می‌گوییم حد تابع $f$ در $x=a$ برابر $L$ است (و می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$)، اگر جمله‌ی زیر درست باشد:

برای هر $\varepsilon>۰$، عددی مانند $\delta>۰$ یافت شود طوری که اگر $۰<|x-a|<\delta$، آن‌گاه $|f(x)-L|<\varepsilon$.

یا به بیان دیگر: $\forall\varepsilon>۰\ \exists\delta>۰ \ni ۰<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$

**مسأله‌ی (۳): ثابت کنید** $\lim\limits_{x\to ۲} x^۲ - ۴x = -۴$.

**حل:** در این مثال $f(x) = x^۲ - ۲x$، $a = ۲$ و $L = -۴$. کافی است نشان دهیم برای هر $\varepsilon > ۰$، یک $\delta > ۰$ وجود دارد که اگر $۰ < |x - ۲| < \delta$، آن‌گاه $|x^۲ - ۴x + ۴| < \varepsilon$. داریم:

$$|x^۲ - ۴x + ۴| < \varepsilon \Leftrightarrow |(x-۲)^۲| < \varepsilon \Rightarrow |x-۲|^۲ < \varepsilon \Leftrightarrow |x-۲| < \sqrt{\varepsilon}$$

نامساوی‌های برگشت‌پذیر بالا نشان می‌دهد که اگر $\delta \le \sqrt{\varepsilon}$، آن‌گاه از $۰ < |x-۲| < \delta$ نتیجه می‌گیریم: $|f(x) + ۴| < \varepsilon$. پس:

$$\lim_{x\to ۲} f(x) = -۴$$

**تست (۱): در تابع با ضابطه‌ی** $f(x) = \dfrac{x^۳ - ۳x^۲ + ۲x}{x - ۱}$، **اگر** $۰ < |x - ۱| < \delta$، **آن‌گاه مقادیر** $f(x)$ **در همسایگی** $-۱$ **به شعاع** $۰/۰۴$ **قرار می‌گیرد. بزرگ‌ترین مقدار** $\delta$ **کدام است؟**

**۱)** $۰/۰۲$ **۲)** $۰/۲$ **۳)** $\sqrt[۳]{۰/۰۴}$ **۴)** $۰/۰۶۴$

**حل:** در واقع در این تست از مفهوم $\lim\limits_{x\to ۱} f(x) = -۱$ سؤال شده است. ابتدا دقت کنید که با تقسیم صورت کسر $f$ بر مخرج آن داریم:

$$x^۳ - ۳x^۲ + ۲x = (x-۱)(x^۲ - ۲x) \Rightarrow f(x) = x^۲ - ۲x \ , \ x \ne ۱$$

می‌خواهیم مقادیر $f$ در همسایگی $-۱$ به شعاع $۰/۰۴$ قرار گیرند، یعنی: $|f(x) + ۱| < ۰/۰۴$. بنابراین:

$$|f(x)+۱| < ۰/۰۴ \Leftrightarrow |x^۲ - ۲x + ۱| < ۰/۰۴ \Leftrightarrow |x-۱|^۲ < ۰/۰۴ \Leftrightarrow |x-۱| < ۰/۲$$

پس اگر $\delta \le ۰/۲$، از شرط $۰ < |x-۱| < \delta$ نتیجه می‌گیریم: $|f(x)+۱| < ۰/۰۴$. بنابراین گزینه‌ی (۲) پاسخ درست است.

**تست (۲): با فرض** $f(x) = \begin{cases} ۵x - ۱ & x < ۱ \\ ۳x + ۱ & x \ge ۱ \end{cases}$، **می‌دانیم وقتی** $۰ < |x - ۱| < \delta$، **آن‌گاه مقادیر** $f$ **در فاصله‌ی** $(۳/۹۸۵, ۴/۰۱۵)$ **قرار می‌گیرد.** $\delta$ **کدام عدد نمی‌تواند باشد؟**

**۱)** $۰/۰۰۰۳$ **۲)** $۰/۰۰۲$ **۳)** $۰/۰۰۳$ **۴)** $۰/۰۰۴$

**حل:** قرار گرفتن $f$ در آن فاصله، معادل $|f(x) - ۴| < ۰/۰۱۵$ است. چون تابع دو ضابطه‌ای است در همسایگی‌های راست و چپ $x = ۱$ جداگانه شرط را بررسی می‌کنیم:

۱) اگر $۰ < x - ۱ < \delta : |f(x) - ۴| < ۰/۰۱۵ \Leftrightarrow |۳x + ۱ - ۴| < ۰/۰۱۵ \Leftrightarrow ۳|x - ۱| < ۰/۰۱۵ \Leftrightarrow |x - ۱| < ۰/۰۰۵$

۲) اگر $-\delta < x - ۱ < ۰ : |f(x) - ۴| < ۰/۰۱۵ \Leftrightarrow |۵x - ۱ - ۴| < ۰/۰۱۵ \Leftrightarrow ۵|x - ۱| < ۰/۰۱۵ \Leftrightarrow |x - ۱| < ۰/۰۰۳$

مشاهده می‌کنید که از یکی نتیجه می‌گیریم: $\delta \le ۰/۰۰۵$ و از دیگری $\delta \le ۰/۰۰۳$. برای آن‌که همواره شرط $|f(x) - ۴| < ۰/۰۱۵$ برقرار باشد، باید هر دو نتیجه‌ی بالا برقرار باشد، یعنی $\delta \le ۰/۰۰۳$، بنابراین گزینه‌ی (۴) نمی‌تواند مقدار $\delta$ باشد.

در تعریف حد، با نزدیک شدن $x$ به عددی مانند $a$، مقدار $f(x)$ به عددی مانند $L$ نزدیک می‌شد، این نزدیک شدن باید از هر دو سمت $a$ (یعنی در همسایگی چپ و راست $a$) صورت بگیرد.

اما به همین ترتیب با در نظر گرفتن یک همسایگی می‌توانیم حدهای یک‌طرفه را تعریف کنیم:

**تعریف:** حد چپ و حد راست.

۱- تابع $f$ در $x = a$ حد راستی برابر $L$ دارد (می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$)، اگر این جمله درست باشد: مقدار $f(x)$ را به $L$ بتوانیم هر قدر که می‌خواهیم نزدیک کنیم، به شرط آن‌که $x$ از سمت مقادیر بزرگ‌تر از $a$، به $a$ به اندازه‌ی کافی نزدیک شود. به بیان دیگر:

$$\forall \varepsilon > ۰ \ \exists \delta > ۰ \ \ni ۰ < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

۲- تابع $f$ در $x = a$ حد چپی برابر $L$ دارد (می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L$)، اگر این جمله درست باشد: مقدار $f(x)$ را به $L$ بتوانیم هر قدر که می‌خواهیم نزدیک کنیم، به شرط آن‌که $x$ از سمت مقادیر کوچک‌تر از $a$، به $a$ به‌اندازه‌ی کافی نزدیک شود. به بیان دیگر:

$$\forall \varepsilon > ۰ \ \exists \delta > ۰ \ \ni -\delta < x - a < ۰ \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

➢ **تذکّر (۱):** همان‌طوری که مشاهده می‌کنید شرط $0<|x-a|<\delta$، در همسایگی راست $a$ (برای $x>a$) تبدیل بـه $0<x-a<\delta$ و در همسایگی چپ $a$ (برای $x<a$)، تبدیل به $-\delta<x-a<0$ می‌شود.

➢ **تذکّر (۲):** اگر حدهای چپ و راست تابع $f$ در $x=a$ موجود و برابر باشند، آن‌گاه تابع $f$ در $x=a$ حد دارد. به بیان دیگر:

$$\lim_{x\to a^-} f(x)=\lim_{x\to a^+} f(x)=L \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x)=L$$

اگر هر دو حد موجود باشند، ولی برابر نباشند، آن‌گاه تابع $f$ در $x=a$ حد ندارد.

➢ **تذکّر (۳):** شرط وجود داشتن هر یک از حدها این است که مقدار $L$ عددی حقیقی شود. به بیان دیگر وقتی $L=\pm\infty$، تابع حد ندارد.

**یک قرارداد مهم:** **اگر تابع $f$ فقط در یک همسایگی یک‌طرفه (همسایگی راست یا همسایگی چپ) $x=a$ تعریف شده باشد، طبق قرارداد کتاب درسی، منظور از $\lim_{x\to a} f(x)$ همان حد راست یا چپ تابع در نقطه‌ی $a$ است.**

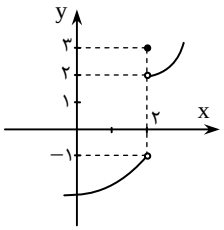
**مثال:**

۱- تابع $f(x)=\sqrt{x-1}$ در همسایگی راست $x=1$ تعریف شده، ولی در همسایگی چپ $x=1$ تعریف نشده است. داریـم $\lim_{x\to 1^+} f(x)=0$، ولی $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ وجود ندارد. طبق قرارداد بالا منظور از $\lim_{x\to 1} f(x)$ همان $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ است، پس $\lim_{x\to 1} f(x)=0$، بنابراین با آن‌که تابع $f$ در $x=1$ حد چپ ندارد، ولی در این نقطه حد دارد.

۲- تابع $f(x)=\sin^{-1}x$ در همسایگی چپ $x=1$ تعریف شده، ولـی در همـسایگی راسـت آن تعریـف نـشده اسـت ($D_f=[-1,1]$). داریـم $\lim_{x\to 1^-} f(x)=\frac{\pi}{2}$، ولی $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ وجود ندارد. طبق قرارداد بالا می‌توانیم بنویسیم: $\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1^-} f(x)=\frac{\pi}{2}$

۳- تابع $f(x)=\begin{cases}\sin^{-1}x & -1\le x\le 1\\ 0 & x>1\end{cases}$، هم در همسایگی راست $x=1$ تعریف شده است، هـم در همـسایگی چـپ آن. پـس نمـی‌تـوانیم از قرارداد بالا استفاده کنیم، بنابراین منظور از $\lim_{x\to 1} f(x)$ هیچ‌کدام از دو حد $\lim_{x\to 1^+} f(x)=0$ و $\lim_{x\to 1^-} f(x)=\frac{\pi}{2}$ نیست. در این مثال حد چـپ و راست برابر نیستند، پس تابع در $x=1$ حد ندارد.

**تست (۳):** **شکل روبه‌رو نمودار تابع $f$ است. حاصل $\lim_{x\to 2^+} f(x)+\lim_{x\to 2^-} f(x)+f(2)$ کدام است؟**




۱) $-2$
۲) **صفر**
۳) $2$
۴) $4$

**حل:** با توجه به شکل واضح است که $\lim_{x\to 2^+} f(x)=2$ (زیرا به نقطه‌ی توخـالی $(2,2)$ نزدیـک مـی‌شـویم)، $\lim_{x\to 2^-} f(x)=-1$ و $f(2)=3$.
بنابراین پاسخ تست $2-1+3=4$ یا گزینه‌ی (۴) می‌شود.

**تست (۴):** **برای اثبات $\lim_{x\to 1^-}(x^2+2|x-2|)=3$ کدام گزینه مناسب است؟**

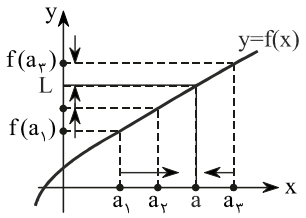
۱) $\forall\varepsilon>0:\ 0<|x-1|<\varepsilon^2 \Rightarrow |f(x)-3|<\varepsilon$
۲) $\forall\varepsilon>0:\ -\sqrt{\varepsilon}<x-1<0 \Rightarrow |f(x)-3|<\varepsilon$
۳) $\forall\varepsilon>0:\ -\varepsilon^2<x-1<0 \Rightarrow |f(x)-3|<\varepsilon$
۴) $\forall\varepsilon>0:\ -\varepsilon<x-1<0 \Rightarrow |f(x)-3|<2\varepsilon$

**حـل:** در همـسایگی چـپ $x=1$ (و بـه‌طـور کـل در همـسایگی کوچـک $x=1$) علامـت عبـارت $x-2$ منفـی اسـت، بنـابراین داریـم: $f(x)=x^2+2(2-x)=x^2-2x+4$. حال چون $L=3$، باید شرط $|f(x)-3|<\varepsilon$ را بررسی کنیم:

$$|f(x)-3|<\varepsilon \Leftrightarrow |x^2-2x+4-3|<\varepsilon \Leftrightarrow |(x-1)^2|<\varepsilon \Leftrightarrow |x-1|<\sqrt{\varepsilon}$$

چون $x\to 1^-$، نامساوی بالا به $-\sqrt{\varepsilon}<x-1<0$ تبدیل می‌شود و طبق تعریف حد چپ، گزینه‌ی (۲) پاسخ تست خواهد بود.

## رابطه‌ی حد و دنباله‌ها:




فرض کنید تابع $y=f(x)$ در $x=a$ حدی برابر $L$ داشته باشد. دنباله‌ای مانند $\{a_n\}$ تشکیل می‌دهیم که به عدد $a$ همگرا باشد. می‌توانیم نقاط متناظر این دنباله را مطابق شکل روی محور $x$ها مشخص کنیم.
با درنظر گرفتن مقادیر تابع به‌ازای $x=a_n$، دنباله‌ی دیگری به‌دست می‌آید که همان $\{f(a_n)\}$ است. می‌توانیم نقاط متناظر این دنباله‌ی جدید را مطابق شکل روی محور $y$ها نشان دهیم.
می‌بینید که با نزدیک شدن جملات دنباله‌ی $\{a_n\}$ به $a$، جملات دنباله‌ی $\{f(a_n)\}$ به $L$ نزدیک می‌شوند. پس دنباله‌ی $\{f(a_n)\}$ به عدد $L$ همگرا است.

**قضیه:** **اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ و $\{a_n\}$ دنباله‌ای باشد که $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$ و $a_n\neq a$، آن‌گاه دنباله‌ی $\{f(a_n)\}$ نیز به $L$ همگرا است.**[1]

**مثال:** داریم: $\lim\limits_{x\to 1} x+1=2$، و می‌دانیم دنباله‌ی $\{\frac{n+1}{n+2}\}$ به عدد ۱ همگرا است. پس دنباله‌ی $\{f(a_n)\}$ یعنی $\{\frac{n+1}{n+2}+1\}$ به عدد $L$ (یعنی ۲) باید همگرا باشد. درستی این نتیجه را خودتان بررسی کنید.

**نتیجه:** **اگر دو دنباله‌ی $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ همگرا به عدد $a$ باشند، $a_n\neq a$ و $b_n\neq b$، ولی دنباله‌های $\{f(a_n)\}$ و $\{f(b_n)\}$ به یک عدد مساوی همگرا نباشند، تابع $f$ در نقطه‌ی $x=a$ حد ندارد.**

**مثال:** تابع $f(x)=\begin{cases}0 & x\le 0\\ 1 & x>0\end{cases}$ در نقطه‌ی $x=0$ حد ندارد (چرا؟). برای اثبات این حکم می‌توانیم از دو دنباله با جمله‌های عمومی $a_n=\frac{1}{n}$ و $b_n=\frac{-1}{n}$ کمک بگیریم. می‌دانیم هر دو دنباله به صفر همگرایند، ولی $f(a_n)=1$ (زیرا $a_n>0$) و $f(b_n)=0$ (زیرا $b_n<0$). پس دنباله‌های $\{f(a_n)\}$ و $\{f(b_n)\}$ به دو عدد مختلف همگرا هستند، لذا تابع $f$ در $x=0$ حد ندارد.

**تست (۵):** **کدام دنباله‌های زیر نشان می‌دهند که $\lim\limits_{x\to 0}\tan\frac{1}{x}$ وجود ندارد؟**

۱) $\{\frac{1}{n\pi}\}$ و $\{\frac{1}{2n\pi}\}$
۲) $\{\frac{1}{2n\pi}\}$ و $\{\frac{1}{3n\pi}\}$
۳) $\{\frac{1}{n\pi-\frac{\pi}{4}}\}$ و $\{\frac{1}{n\pi+\frac{\pi}{4}}\}$
۴) $\{\frac{1}{2n\pi-\frac{\pi}{3}}\}$ و $\{\frac{1}{2n\pi+\frac{2\pi}{3}}\}$

**حل:** در همه‌ی گزینه‌ها حد دنباله‌ها برابر صفر است. پس باید بررسی کنیم که در کدام گزینه مقادیر تابع به ازای دو دنباله به عددهای مختلفی همگرا می‌شود. مثلاً در گزینه‌ی (۱) اگر $a_n=\frac{1}{n\pi}$ و $b_n=\frac{1}{2n\pi}$، آن‌گاه داریم: $f(a_n)=0$ و $f(b_n)=0$ (که $f(x)=\tan\frac{1}{x}$). پس حد دو دنباله عددهای مختلفی نمی‌شود و این گزینه برای نشان دادن حد نداشتن تابع $f$ مناسب نیست. به‌همین ترتیب می‌توانید گزینه‌های دیگر را رد کنید. پاسخ تست گزینه‌ی (۳) است، زیرا:

$$\left.\begin{array}{l} a_n=\frac{1}{n\pi-\frac{\pi}{4}}\Rightarrow f(a_n)=\tan(n\pi-\frac{\pi}{4})=-1\\ b_n=\frac{1}{n\pi+\frac{\pi}{4}}\Rightarrow f(b_n)=\tan(n\pi+\frac{\pi}{4})=1\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)\neq\lim\limits_{n\to\infty} f(b_n)\\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty} b_n=0\end{cases}\Rightarrow \text{f در } x=0 \text{ حد ندارد}$$

[1]: اگر برای تعداد متناهی از $a_n$ ها داشته باشیم $a_n=a$، باز هم حکم این قضیه درست است.

**تست (۶): برای آن‌که نشان دهیم تابع** $f(x)=\begin{cases}1 & x\in Q\\ 0 & x\notin Q\end{cases}$ **در** $x=2$ **حد ندارد، از دو دنباله‌ی** $\{2+\frac{1}{n}\}$ **و** $\{\frac{2n+a}{n}\}$ **استفاده می‌کنیم. در این صورت** $a$ **کدام عدد نمی‌تواند باشد؟**

۱) $-\sqrt{3}$ ۲) $7$ ۳) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ۴) $\sqrt{5}$

**حل:** باید دو دنباله با جمله‌های عمومی $a_n=2+\frac{1}{n}$ و $b_n=\frac{2n+a}{n}$ دارای این شرط باشندکه اولاً $2=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ (که این شرط برقرار است)، ثانیاً $\lim\limits_{n\to\infty}f(b_n)\neq\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)$.

چون همواره $a_n$ یک عدد گویا است، پس $f(a_n)=1$، بنابراین برای آن‌که $\lim\limits_{n\to\infty}f(b_n)\neq 1$، باید دنباله‌ی $\{b_n\}$ از اعداد گنگ باشد. گزینه‌های (۱)، (۳) و (۴) چنین شرطی را برآورده می‌کنند، بنابراین پاسخ تست گزینه‌ی (۲) است.

در رابطه‌ی حد و دنباله‌ها، عکس قضیه‌ی گفته شده نیز به‌صورت زیر قابل بیان است:

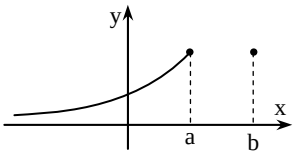
**قضیه:** **اگر برای هر دنباله‌ی** $\{a_n\}$ **که** $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ **و** $a_n\neq a$، **داشته باشیم** $\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)=L$، **آن‌گاه** $\lim\limits_{x\to a}f(x)=L$.

**تذکّر:** به کلمه‌ی «هر» دقت کنید. با یک دنباله‌ی $\{a_n\}$ که در شرایط بالا صدق کند، نمی‌توان نشان داد که تابع $f$ در $x=a$ دارای حد است!

## روش‌های مختلف تشخیص نقاطی که تابع در آن‌ها حد ندارد:

با توجه به آن‌چه که تاکنون گفته‌ایم به‌صورت زیر می‌توانیم این روش‌ها را جمع‌بندی کنیم:

**۱- اگر تابع** $f$ **در یک همسایگی** $x=a$ **نامعین باشد (این همسایگی جزء دامنه‌ی تابع نباشد)، تابع در این نقطه حد نخواهد داشت. زیرا اصلاً نمی‌توانیم** $x$ **را به آن نقطه نزدیک کنیم.**

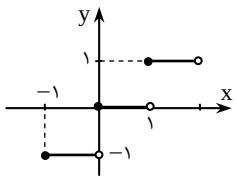



**مثال:الف)** در شکل مقابل، تابع در $x=b$ حد ندارد و در $x=a$ حد راست ندارد. تابع در هر دو همسایگی $x=b$ و در همسایگی راست $x=a$ نامعین است. دقت کنید که طبق قرارداد، تابع در $x=a$ حد دارد، زیرا فقط در یک همسایگی $x=a$ (همسایگی چپ) تعریف شده، بنابراین منظور از $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ همان $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)$ است.

**ب)** دامنه‌ی تابع $y=\sqrt{(1-x)(x-2)}$ برابر $[1,2]$ است، پس همسایگی چپ $x=1$ در دامنه‌ی تابع نیست و $\lim\limits_{x\to 1^-}y$ وجود ندارد (البته $\lim\limits_{x\to 1^+}y=0$). چون تابع فقط در یک همسایگی $x=1$ تعریف شده، داریم: $\lim\limits_{x\to 1}y=\lim\limits_{x\to 1^+}y=0$، پس تابع در $x=1$ حد دارد.

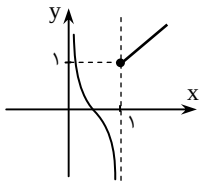
**پ)** تابع $y=\frac{1}{\tan\frac{1}{x}}$ در $x=0$ حد ندارد، زیرا در هر همسایگی $x=0$ که در نظر بگیریم نقاطی هست که در آن‌ها $y$ نامعین است. در واقع تابع در نقاط $x=\frac{1}{n\pi}$ (که $n\in Z-\{0\}$) نامعین است (چرا؟)، و در هر همسایگی $x=0$، هر چقدر هم که کوچک باشد، از این نقاط یافت می‌شود.

**۲- اگر تابع در همسایگی محذوف** $x=a$ **تعریف شده باشد و حد چپ و حد راست تابع در این نقطه موجود نباشند، یا موجود و نابرابر باشند، تابع در** $x=a$ **حد ندارد.**




**مثال: الف)** تابع $y=[x]$ در $x=0$ حد ندارد، زیرا مطابق نمودار تابع داریم: $\lim\limits_{x\to 0^+}y=0$ و $\lim\limits_{x\to 0^-}y=-1$.

(در واقع این تابع در هیچ نقطه‌ی $x=n$ (که $n\in Z$) حد ندارد.)




**ب)** تابع $f(x)=\begin{cases}x & x\geq 1\\ \cot(\pi x) & x<1\end{cases}$ در $x=1$ حد ندارد، زیرا با آن‌که $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=1$، ولی $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)$ وجود ندارد (در واقع $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=-\infty$). نمودار تابع را در بازه‌ی $(0,+\infty)$ مشاهده می‌کنید.

**۳- اگر برای دو دنباله‌ی** $\{a_n\}$ **و** $\{b_n\}$ **که** $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$، $a_n\neq a$ **و** $b_n\neq b$، **دنباله‌های** $\{f(a_n)\}$ **و** $\{f(b_n)\}$ **به دو عدد مختلف همگرا باشند، تابع** $f$ **در** $x=a$ **حد ندارد.**

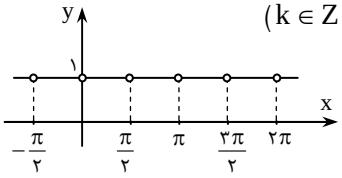
**مثال:** تابع $y=\sin\frac{\pi}{x}$ در $x=0$ حد ندارد، زیرا برای دنباله‌هایی با جمله‌ی عمومی $a_n=\frac{1}{2n}$ و $b_n=\frac{1}{2n+\frac{1}{2}}$ داریم: $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$، ولی $f(a_n)=0$ و $f(b_n)=1$، پس $\{f(a_n)\}$ و $\{f(b_n)\}$ به عددهای متفاوتی همگرا هستند.

**تست (۷): چند تا از حدهای زیر وجود دارد؟**

**الف)** $\lim\limits_{x\to 0}\tan x\times\cot x$ **ب)** $\lim\limits_{x\to 0}\sin^{-1}(x-1)$ **پ)** $\lim\limits_{x\to 0^-}\sqrt{1-\sqrt{1-x}}$

**۱) صفر** **۲)** ۱ **۳)** ۲ **۴)** ۳

**حل:** داریم: $\lim\limits_{x\to 0}\tan x\times\cot x=1$. تابع $y=\tan x\times\cot x$ در نقاط $x=k\frac{\pi}{2}$ تعریف نشده است ($k\in Z$)




و در نقاط دیگر داریم: $y=1$. پس نمودار آن مانند شکل روبه‌رو می‌شود. بنابراین در همه‌ی نقاط $x\in R$ حد تابع برابر ۱ است، حتی نقاطی که جزء دامنه‌ی تابع نیستند.

در تابع $y=\sin^{-1}(x-1)$ همسایگی چپ $x=0$ در دامنه‌ی تابع نیست، زیرا:

دامنه‌ی تابع: $|x-1|\le 1\Rightarrow -1\le x-1\le 1\Rightarrow 0\le x\le 2$

پس حد $\lim\limits_{x\to 0^-}\sin^{-1}(x-1)$ وجود ندارد، ولی حد راست تابع وجود دارد و برابر $-\frac{\pi}{2}$ است. بنابراین تابع در $x=0$ حدی برابر $-\frac{\pi}{2}$ دارد، زیرا فقط در یک همسایگی $x=0$ تعریف شده است.

حد چپ تابع $\sqrt{1-\sqrt{1-x}}$ در $x=0$ موجود نیست، زیرا همسایگی چپ $x=0$ در دامنه‌ی تابع نیست:

$$\left.\begin{array}{l}1-x\ge 0\Rightarrow x\le 1\\ 1-\sqrt{1-x}\ge 0\Rightarrow\sqrt{1-x}\le 1\Rightarrow 1-x\le 1\Rightarrow x\ge 0\end{array}\right\}\Rightarrow \text{دامنه‌ی تابع}=[0,1]$$

پس حدهای الف و ب وجود دارند. بنابراین گزینه‌ی ۳ درست است.

## قضایای حد:

در بحث حد قضایایی وجود دارد که محاسبه‌ی حدود تابع را ساده می‌کند. اثبات این قضایا را می‌توانید در کتاب‌های مرجع مشاهده کنید. در این‌جا ما فهرست‌وار آن‌ها را ذکر می‌کنیم و درباره‌ی قضیه‌های مهم‌تر مثال‌هایی را حل می‌کنیم.

**قضیه:**

**۱- اگر $f$ تابع ثابت با دامنه‌ی $R$ باشد (برای هر $x\in R$ داشته باشیم: $f(x)=c$)، آن‌گاه: $\lim\limits_{x\to a}f(x)=c$ (برای هر $a\in R$).**

**۲- اگر $\lim\limits_{x\to a}f(x)=L_1$ و $\lim\limits_{x\to a}g(x)=L_2$، آن‌گاه:[1] ($c\in R$ یک عدد ثابت است و $n\in N$)**

**الف)** $\lim\limits_{x\to a}cf(x)=cL_1$ **ب)** $\lim\limits_{x\to a}(f\pm g)(x)=L_1\pm L_2$

**پ)** $\lim\limits_{x\to a}(fg)(x)=L_1L_2$ **ت)** $\lim\limits_{x\to a}(\frac{f}{g})(x)=\frac{L_1}{L_2}$ **(به شرط $L_2\ne 0$)**

**ث)** $\lim\limits_{x\to a}f^n(x)=L_1^n$ **ج)** $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{L_1}$ **(اگر $n$ زوج باشد، برای $L_1>0$ این تساوی برقرار است.)**

**چ)** $\lim\limits_{x\to a}|f(x)|=|L_1|$

**نتیجه:** با استفاده از قضیه‌های بالا نتیجه می‌گیریم که یک چند جمله‌ای مانند $P(x)$ در همه‌ی نقاط $a\in R$ حد دارد و مقدار حد آن، همان $P(a)$ می‌شود. یعنی: $\lim\limits_{x\to a}P(x)=P(a)$.

**تذکّر:** توابع مثلثاتی $f(x)=\sin x$ و $g(x)=\cos x$ نیز مانند چند جمله‌ای‌ها هستند، یعنی: $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$ و $\lim\limits_{x\to a}g(x)=g(a)$، هم‌چنین توابع $y=\tan x$ (برای $a\ne k\pi+\frac{\pi}{2}$) و $y=\cot x$ (برای $a\ne k\pi$).

[1] - در این قضیه توابع $f$ و $g$ باید در همسایگی یکسانی از $x=a$ تعریف شده باشند.

**نکته:** **در قضیه‌ی قبل دیدیم که اگر $f$ و $g$ در $x=a$ حد داشته باشند، توابع $f\pm g$، $fg$ و $\frac{f}{g}$ (به شرط غیر صفر بودن حد $g$) نیز در $x=a$ حد خواهند داشت. عکس این قضیه، درست نیست. در واقع:**

**الف) اگر $f$ در $x=a$ حد داشته باشد و $g$ حد نداشته باشد، آن‌گاه قطعاً $f\pm g$ و $\frac{g}{f}$ در $x=a$ حد نخواهند داشت، ولی $fg$ و $\frac{f}{g}$ ممکن است حد داشته باشند.**

**ب) اگر $f$ و $g$ هر دو در $x=a$ حد نداشته باشند، هر یک از توابع $f\pm g$، $fg$، $\frac{f}{g}$ و $\frac{g}{f}$ ممکن است در $x=a$ حد داشته باشند یا نداشته باشند.**

سعی کنید در هر قسمت مثال مناسبی برای توابع $f$ و $g$ ارائه دهید. برای نمونه ثابت می‌کنیم که در حالت (الف)، $\frac{g}{f}$ قطعاً حد ندارد. زیرا اگر $h=\frac{g}{f}$ در $x=a$ حد داشته باشد، هم $h$ و هم $f$ در این نقطه حد دارند، پس $hf$ نیز حد دارد، ولی $g=hf$، بنابراین تابع $g$ باید در $x=a$ حد داشته باشد که مخالف فرض است.

**تست (۸):** **اگر تابع $f$ در نقطه‌ی $x=1$ حد داشته باشد و $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2f(x)-1}{f(x)+1}=1$، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ کدام است؟**

**۱)** $-3$ **۲)** $-2$ **۳)** $2$ **۴)** $3$

**حل:** فرض می‌کنیم $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=L$، آن‌گاه طبق قضیه‌های حد داریم:

$$\lim_{x\to 1}\frac{2f(x)-1}{f(x)+1}=\frac{2L-1}{L+1}\xrightarrow{\text{فرض}}\frac{2L-1}{L+1}=1\Rightarrow 2L-1=L+1\Rightarrow L=2$$

بنابراین گزینه‌ی (۳) درست است.

**تست (۹):** **اگر تابع $f(x)=\begin{cases}(|x|-a)^2-3 & x<0\\ x+2a & x>0\end{cases}$ در $x=0$ حد داشته باشد، مجموعه‌ی مقادیر $a$ کدام است؟**

**۱)** $\{-1\}$ **۲)** $\{-1,3\}$ **۳)** $\{1,-3\}$ **۴)** $\varnothing$

**حل:** برای حد داشتن باید حد چپ و راست تابع باهم برابر باشند:

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^-}f(x)\Rightarrow \lim_{x\to 0^+}(x+2a)=\lim_{x\to 0^-}(|x|-a)^2-3\Rightarrow 2a=a^2-3$$

$$\Rightarrow a^2-2a-3=0\Rightarrow (a-3)(a+1)=0\Rightarrow a_1=3\ ,\ a_2=-1$$

بنابراین گزینه‌ی ۲ درست است.

**قضیه:** **قضیه‌ی فشردگی: اگر در یک همسایگی محذوف $x=a$ بدانیم: $f(x)\le h(x)\le g(x)$ و $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=L$، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a}h(x)=L$.**

**مسأله‌ی (۴):** **اگر برای تابع $f$ بدانیم: $\lim\limits_{x\to a}|f(x)|=0$، ثابت کنید: $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$.**

**حل:** می‌دانیم برای هر عدد حقیقی $\alpha$ داریم: $-|\alpha|\le\alpha\le|\alpha|$، بنابراین:

$$\left.\begin{array}{l}-|f(x)|\le f(x)\le|f(x)|\\ \lim\limits_{x\to a}-|f(x)|=\lim\limits_{x\to a}|f(x)|=0\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{فشردگی}}\lim_{x\to a}f(x)=0$$

**تست (۱۰):** اگر $\forall x \in R-\{1\}$ : $2x - x^2 - 2 < f(x) < \cos(\pi x)$ ، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ کدام است؟

۱) موجود نیست. ۲) ۱ ۳) صفر ۴) $-1$

**حل:** می‌دانیم $\lim\limits_{x\to 1} 2x - x^2 - 2 = \lim\limits_{x\to 1}\cos(\pi x) = -1$ ، پس طبق قضیه‌ی فشردگی داریم: $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -1$ . بنابراین گزینه‌ی (۴) درست است.

**قضیه:** **قضیه‌ی توابع کران‌دار: اگر تابع $f$ در همسایگی محذوف نقطه‌ی $x = a$ کران‌دار باشد و $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ ، آن‌گاه:**

$$\lim_{x\to a} g(x)f(x) = 0$$

**به بیان دیگر:** صفر حدی = کران‌دار × صفر حدی.

**تذکّر:** دقت کنید که در این قضیه لازم نیست تابع $f$ در نقطه‌ی $x = a$ حد داشته باشد.

این قضیه را می‌توانید با استفاده از قضیه‌ی فشردگی اثبات کنید. برای تمرین آن را اثبات کنید. (راهنمایی: فرض کنید $|f(x)| \le k$ ، سپس با استفاده از قضیه‌ی فشردگی نشان بدهید: $\lim\limits_{x\to a} |f(x)g(x)| = 0$ و در نهایت از مسأله‌ی (۴) استفاده کنید.)

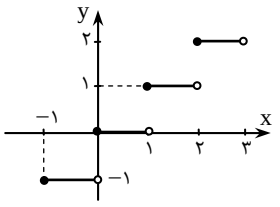
**مثال:** تابع $f(x) = \sin\frac{\pi}{x}$ در $x = 0$ حد ندارد، ولی در همسایگی آن کران‌دار است $(-1 \le f(x) \le 1)$. بنابراین از $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x^2 - x}{x-1} = 0$ نتیجه می‌گیریم: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x^2 - x}{x-1}\sin\frac{\pi}{x} = 0$ . از دیگر توابع کران‌دار معروف می‌توان به $y = \cos x$ ، $y = \sin^{-1} x$ ، $y = \cos^{-1} x$ ، $y = \tan^{-1} x$ و $y = \cot^{-1} x$ اشاره کرد.

**تست (۱۱):** فرض کنید $D(x) = \begin{cases} 1 & x \in Q \\ 0 & x \notin Q \end{cases}$ و $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & x \ge 2 \\ 4 - 2x & x < 2 \end{cases}$ . در این صورت $\lim\limits_{x\to 2} f(x)D(x)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $-2$ ۳) صفر ۴) وجود ندارد.

**حل:** با توجه به ضابطه‌ی تابع $f$ داریم $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 0$ ، پس $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 0$ . حال چون همواره $0 \le D(x) \le 1$ ، پس $D(x)$ تابعی کران‌دار است و طبق قضیه‌ی قبل حاصل $\lim\limits_{x\to 2} f(x)D(x)$ برابر صفر می‌شود. بنابراین گزینه‌ی ۳ درست است.

## حد در توابع شامل جزء صحیح:




تابع جزء صحیح و مسائل حدی مربوط به آن بخش مهمی از تست‌های این مبحث را تشکیل می‌دهد. به‌این دلیل جداگانه آن را بررسی می‌کنیم.

طبق نمودار تابع $f(x) = [x]$ که در شکل روبه‌رو رسم شده است، در تمام نقاط $x = n$ (که $n \in Z$) تابع حد ندارد. در نقاط دیگر تابع حد دارد و مقدار حد با مقدار تابع یکسان است.

در نقاط $x = n$ به‌صورت دقیق‌تر طبق نمودار می‌توانیم بگوییم: $\lim\limits_{x\to n^+} f(x) = n$ و $\lim\limits_{x\to n^-} f(x) = n - 1$ . بیان بالا اساس پیدا کردن حد در توابع شامل جزء صحیح است.

**نکته:** **در محاسبه‌ی حد در توابع شامل جزء صحیح، در صورت امکان جزء صحیح‌ها را حذف کنید و به جای آن‌ها اعداد ثابت قرار دهید. برای این منظور دقت کنید که:**

**۱- اگر** $f(x) \to L$ **و** $L$ **عددی غیر صحیح باشد، آن‌گاه:** $[f(x)] = [L]$

**۲- اگر** $f(x) \to L^+$ **(به معنی** $f(x) \to L$ **و** $f(x) > L$**)، که** $L$ **عددی صحیح است، آن‌گاه:** $[f(x)] = L$

**۳- اگر** $f(x) \to L^-$ **(به معنی** $f(x) \to L$ **و** $f(x) < L$**)، که** $L$ **عددی صحیح است، آن‌گاه:** $[f(x)] = L - 1$

**دقت کنید که در موارد (۲) و (۳) از نامساوی‌ها یا تعیین علامت عبارت** $f(x) - L$ **یا از نمودار تابع** $f(x)$ **می‌توانید کمک بگیرید.**

WWW.RIAZISARA.IR

با چند تست با مفهوم نکته‌ی بالا بیش‌تر آشنا شوید:

**تست (۱۲): اگر** $f(x)=|x|+[x+\frac{\sqrt{۳}}{۲}]$، **حد چپ تابع در** $x=۳$ **کدام است؟**

**۱)** ۵ **۲)** ۶ **۳)** ۷ **٤)** ۴

**حل:** چون $۳+\frac{\sqrt{۳}}{۲}\notin Z$، از بخش (۱) نکته‌ی قبل استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۳}[x+\frac{\sqrt{۳}}{۲}]=[۳+\frac{\sqrt{۳}}{۲}]\xrightarrow{۰<\frac{\sqrt{۳}}{۲}<۱}[۳+\frac{\sqrt{۳}}{۲}]=۳\Rightarrow\lim_{x\to ۳}[x+\frac{\sqrt{۳}}{۲}]=۳\Rightarrow\lim_{x\to ۳}f(x)=۳+۳=۶$$

بنابراین گزینه‌ی ۲ درست است.

**تست (۱۳): با فرض** $a=-\frac{۱}{۵}$، **حاصل** $\lim_{x\to a^-}[\frac{۱}{x}]$ **کدام است؟**

**۱)** $-۵$ **۲)** $-۴$ **۳)** $-۶$ **٤)** $-۳$

**حل:** چون عبارت داخل جزء صحیح، عدد صحیح $-۵$ می‌شود، باید تعیین کنیم که $\frac{۱}{x}\to(-۵)^+$ یا $\frac{۱}{x}\to(-۵)^-$. در حالت اول چون می‌توانیم $\frac{۱}{x}$ را در بازه‌ی $(-۵,-۴)$ قرار دهیم، حاصل حد $[\frac{۱}{x}]$، برابر $-۵$ می‌شود و در حالت دوم چون می‌توانیم $\frac{۱}{x}$ را در $(-۶,-۵)$ قرار دهیم، حاصل حد $[\frac{۱}{x}]$ برابر $-۶$ می‌شود. داریم:

$$x\to(-\frac{۱}{۵})^-\Rightarrow x<-\frac{۱}{۵}\Rightarrow\frac{۱}{x}>-۵\Rightarrow\frac{۱}{x}\to(-۵)^+\Rightarrow\lim_{x\to a^-}[\frac{۱}{x}]=[(-۵)^+]=-۵$$

بنابراین گزینه‌ی ۱ درست است.

**تست (۱۴): اختلاف حدهای راست و چپ تابع** $f(x)=[-x^۲+۲x]-[\frac{-۲x-۵}{۳}]$ **در** $x=۲$ **کدام است؟**

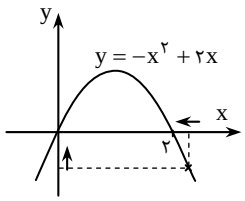
**۱)** صفر **۲)** ۱ **۳)** $-۱$ **٤)** ۲

**حل:** ابتدا حدهای چپ و راست $[\frac{-۲x-۵}{۳}]$ را پیدا می‌کنیم:

$$x\to ۲^+\Rightarrow x>۲\Rightarrow -۲x<-۴\Rightarrow -۲x-۵<-۹\Rightarrow\frac{-۲x-۵}{۳}<-۳\Rightarrow\lim_{x\to ۲^+}[\frac{-۲x-۵}{۳}]=[(-۳)^-]=-۴$$

$$x\to ۲^-\Rightarrow x<۲\Rightarrow -۲x>-۴\Rightarrow -۲x-۵>-۹\Rightarrow\frac{-۲x-۵}{۳}>-۳\Rightarrow\lim_{x\to ۲^-}[\frac{-۲x-۵}{۳}]=[(-۳)^+]=-۳$$

حال حدهای چپ و راست $[-x^۲+۲x]$ را با توجه به نمودار تابع $y=-x^۲+۲x$ پیدا می‌کنیم:




با توجه به نمودار، وقتی $x\to ۲^+$، مقدار $y$ به صفر از سمت مقادیر کوچک‌تر از آن نزدیک می‌شود، یعنی $y\to ۰^-$.

بنابراین: $\lim_{x\to ۲^+}[-x^۲+۲x]=[۰^-]=-۱$.

به‌همین ترتیب داریم: $\lim_{x\to ۲^-}[-x^۲+۲x]=[۰^+]=۰$. با ترکیب نتایج بالا به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to ۲^+}f(x)=-۱-(-۴)=۳\ ,\ \lim_{x\to ۲^-}f(x)=۰-(-۳)=۳\Rightarrow \text{اختلاف دو حد}=۰$$

بنابراین گزینه‌ی ۱ درست است.

**مسأله‌ی (۵): حاصل $\lim_{x\to 0}[\frac{1}{x}]$، $\lim_{x\to 0} x[\frac{1}{x}]$ و $\lim_{x\to 0} x^2[\frac{1}{x}]$ را بیابید.**

**حل:** حد $\lim_{x\to 0}[\frac{1}{x}]$ وجود ندارد. کافی است دنباله‌ای با جمله‌ی عمومی $a_n = \frac{1}{n}$ را در نظر بگیرید. داریم $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$، و چون $f(a_n) = n$ (که $f(x) = [\frac{1}{x}]$)، نتیجه می‌گیریم دنباله‌ی $\{f(a_n)\}$ یک دنباله‌ی واگرا است. پس حد مورد نظر وجود ندارد.

با استفاده از قضیه‌ی فشردگی می‌توانیم نشان بدهیم: $\lim_{x\to 0} x[\frac{1}{x}] = 1$. می‌دانیم برای هر $\alpha \in R$ داریم: $\alpha - 1 < [\alpha] \le \alpha$، بنابراین به ازای $x > 0$ داریم:

$$\frac{1}{x} - 1 < [\frac{1}{x}] \le \frac{1}{x} \xrightarrow{x>0} x(\frac{1}{x} - 1) < x[\frac{1}{x}] \le 1 \Rightarrow 1 - x < x[\frac{1}{x}] \le 1$$

چون $\lim_{x\to 0^+} 1 - x = 1$، طبق قضیه‌ی فشردگی نتیجه می‌گیریم: $\lim_{x\to 0^+} x[\frac{1}{x}] = 1$. به‌همین ترتیب برای $x < 0$ می‌توانید ثابت کنید: $\lim_{x\to 0^-} x[\frac{1}{x}] = 1$ و نتیجه بگیرید: $\lim_{x\to 0} x[\frac{1}{x}] = 1$.

برای به‌دست آوردن حد آخر نیز دقت کنید که: $\lim_{x\to 0} x^2[\frac{1}{x}] = \lim_{x\to 0} x \times \lim_{x\to 0} x[\frac{1}{x}] = 0 \times 1 = 0$

به‌همین ترتیب می‌توانید نشان بدهید $\lim_{x\to 0} x^n[\frac{1}{x}] = 0$ (برای $n \in N$، $n \ge 2$).

**تست (۱۵): حاصل $\lim_{x\to 0^+}[x[\frac{1}{x}]]$ کدام است؟**

**۱) صفر** **۲)** ۱ **۳)** $-1$ **۴) وجود ندارد.**

**حل:** در راه‌حل مسأله‌ی قبل دیدید که برای $x > 0$ داریم: $1 - x < x[\frac{1}{x}] \le 1$. پس وقتی $x \to 0^+$، داریم: $x[\frac{1}{x}] \to 1$، ولی نمی‌توانیم بگوییم $x[\frac{1}{x}] \to 1^-$ (حتی با آن‌که $x[\frac{1}{x}] \le 1$). در واقع اگر دو دنباله با جمله‌ی عمومی $a_n = \frac{1}{n}$ و $b_n = \frac{1}{n + 0/5}$ را در نظر بگیرید، داریم: $f(a_n) = 1$، ولی $f(b_n) < 1$ (که $f(x) = x[\frac{1}{x}]$). پس $\lim_{n\to\infty}[f(a_n)] = 1$، ولی $\lim_{n\to\infty}[f(b_n)] = [1^-] = 0$.

بنابراین گزینه‌ی (۴) درست است.

**نکته:** **(عامل صفر کننده در حد)**

**فرض کنید تابع $f$ در نقطه‌ی $x = n$ (که $n \in Z$) دارای حد باشد. در این صورت تابع $y = f(x)[x]$ در نقطه‌ی $x = n$ تنها در صورتی حد دارد که $f$ در این نقطه در نقش عامل صفر کننده ظاهر شود. یعنی $f$ در این نقطه حدی برابر صفر داشته باشد.**

**اثبات:** اگر $\lim_{x\to n} f(x) = L$، آن‌گاه داریم:

$$\lim_{x\to n^+} y = \lim_{x\to n^+} f(x) \times \lim_{x\to n^+}[x] = L \times [n^+] = Ln$$

$$\lim_{x\to n^-} y = \lim_{x\to n^-} f(x) \times \lim_{x\to n^-}[x] = L \times [n^-] = L(n-1)$$

دو حد فوق تنها در صورتی باهم برابرند که $L = 0$.

**مثال:** تابع $y = (x-2)[x]$ در $x = 2$ حدی برابر صفر دارد (زیرا $x - 2$ در نقش عامل صفر کننده ظاهر می‌شود)، ولی در نقاط دیگر با طول صحیح حد ندارد.

**تست (۱۶): تابع $f(x) = (x^3 - 3x + 2)[x]$ در چند نقطه‌ی $a \in Z$ دارای حد است؟**

**۱)** ۱ **۲)** ۲ **۳)** ۳ **۴) بی‌شمار**

**حل:** تابع در نقاطی با طول صحیح دارای حد است که $x^3 - 3x + 2$ دارای حد صفر باشد. پس باید ریشه‌های آن را به‌دست آوریم. واضح است که $x = 1$ یکی از ریشه‌ها است، با تقسیم عبارت بر $x - 1$ می‌توانیم آن را تجزیه کنیم:

$$x^3 - 3x + 2 = (x-1)(x^2 + x - 2) = (x-1)(x+2)(x-1) = (x-1)^2(x+2)$$

پس در دو نقطه‌ی $x = 1$ و $x = -2$، عبارت $x^3 - 3x + 2$ در نقش عامل صفر کننده ظاهر می‌شود. بنابراین گزینه‌ی ۲ درست است.

WWW.RIAZISARA.IR

فصل ۳

# مفاهیم مقدماتی حد

## پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱- اگر $3-\frac{1}{3} < x < 3+\frac{1}{3}$ و $x \neq 3$، آن‌گاه در نامساوی $\left|\frac{x^2-3x}{2x-6}-\frac{3}{2}\right| < \varepsilon$، کم‌ترین مقدار $\varepsilon$ چقدر است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{6}$ ۳) $\frac{1}{9}$ ۴) $\frac{3}{2}$

۲- اگر به ازای هر $x$ که $\frac{7}{2} < x < \frac{9}{2}$ و $x \neq 4$ داشته باشیم: $\left|\frac{x^2-4x}{3x-12}-\frac{4}{3}\right| < \beta$، $\beta$ کدام‌یک از مقادیر زیر را می‌تواند اختیار کند؟

۱) $\frac{1}{8}$ ۲) $\frac{1}{12}$ ۳) $\frac{1}{9}$ ۴) $\frac{1}{5}$

۳- در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{2x^2-x-1}{x-1}$، وقتی $0<|x-1|<\delta$، مقادیر $f(x)$ در بازه‌ی $(2/96, 3/04)$ قرار می‌گیرد. بزرگ‌ترین مقدار $\delta$ کدام است؟

۱) ۰/۱ ۲) ۰/۲ ۳) ۰/۰۲ ۴) ۰/۰۱

۴- تابع $f(x)=x^3-3x^2+3x$ مفروض است. $x$ به کدام همسایگی نقطه‌ی $x=1$ تعلق داشته باشد تا نامساوی $0/999 < f(x) < 1/001$ برقرار باشد؟

۱) $(\frac{9}{10},\frac{11}{10})$ ۲) $(\frac{8}{10},\frac{12}{10})$ ۳) $(-\frac{9}{10},-\frac{7}{10})$ ۴) $(\frac{7}{10},\frac{13}{10})$

۵- در تابع $f(x)=\begin{cases}3x-1 & x\neq 1\\ 4 & x=1\end{cases}$، اگر $0<|x-1|<\delta$، آن‌گاه فاصله‌ی مقادیر $f(x)$ از حد آن در نقطه‌ی $x=1$، کم‌تر از ۰/۰۱ می‌شود. بیش‌ترین مقدار $\delta$ کدام است؟

۱) ۰/۲۵ ۲) ۰/۰۳ ۳) $\frac{1}{200}$ ۴) $\frac{1}{300}$

۶- در تابع $f(x)=\begin{cases}2x+1 & x>3\\ 5x-8 & x<3\end{cases}$، اگر $0<|x-3|<\delta$، آن‌گاه فاصله‌ی مقادیر $f(x)$ از عدد ۷، کم‌تر از ۰/۱ است. $\delta$ کدام عدد می‌تواند باشد؟

۱) ۰/۰۲۵ ۲) ۰/۰۳ ۳) ۰/۰۵ ۴) ۰/۰۱

۷- در تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x-1}+1 & x\geq 1\\ 2x-1 & x<1\end{cases}$، اگر $|x-1|\leq a$، آن‌گاه $|f(x)-1|\leq 0/1$. بیش‌ترین مقدار $a$ کدام است؟

۱) ۰/۲ ۲) ۰/۱ ۳) ۰/۰۱ ۴) ۰/۰۵

۸- در تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{9x^2-1}{3x-1} & x>2\\ 4x-1 & x\leq 2\end{cases}$، اگر $0<|x-2|<\delta$، آن‌گاه مقادیر $f(x)$ در بازه‌ی $(6/97, 7/03)$ قرار می‌گیرد. بیش‌ترین مقدار $\delta$ کدام است؟

۱) ۰/۰۱ ۲) ۰/۰۲۵ ۳) ۰/۰۰۷۵ ۴) ۰/۰۰۱۲۵

۹- تابع $f:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{|x|}\sin(\frac{1}{x})$ مفروض است. کدام گزینه برای هر $\varepsilon>0$، درست است؟

۱) $|x|<\varepsilon^2 \Rightarrow |f(x)|<\varepsilon$ ۲) $|x|<\sqrt{\varepsilon} \Rightarrow |f(x)|<\varepsilon$

۳) $|x|<\frac{\varepsilon}{10} \Rightarrow |f(x)|<\frac{\varepsilon}{100}$ ۴) $|x|<\frac{\varepsilon}{100} \Rightarrow |f(x)|<\frac{\varepsilon}{10}$

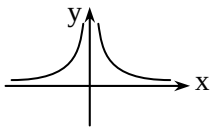
* ۱۰- در تعریف ریاضی حد برای $\lim\limits_{x\to ۰/۶}[x+\frac{۳}{۱۰}]$ ، اگر $\varepsilon = ۰/۰۱$ ، بیش‌ترین مقدار $\delta$ کدام است؟

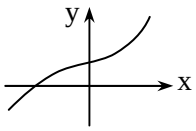
۱) ۰/۱ ۲) ۰/۲ ۳) ۰/۳ ۴) ۰/۹

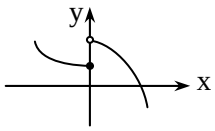
۱۱- اگر تابع $f(x)=\begin{cases} mx-۲ & x>۲ \\ |x|+۴m & x\le ۲\end{cases}$ در $x=۲$ حد داشته باشد، مقدار $f(-۵)$ کدام است؟

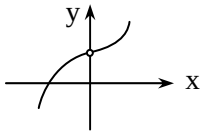
۱) $-۳$ ۲) $-۲$ ۳) ۱۲ ۴) ۱۷

۱۲- کدام‌یک از توابعی که نمودار آن‌ها در زیر رسم شده، در $x=۰$ دارای حد راست است، ولی حد ندارد؟

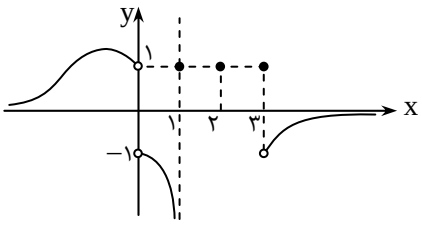
۱) 


۲) 


۳) 


۴) 


۱۳- در شکل مقابل نمودار تابع $y=f(x)$ رسم شده است. $\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)$ کدام است؟




۱) ۱
۲) $-۱$
۳) ۲
۴) وجود ندارد.

۱۴- با توجه به شکل تست ۱۳، حاصل $\lim\limits_{x\to ۰^-}[f(x)]$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $-۱$ ۳) $-۲$ ۴) صفر

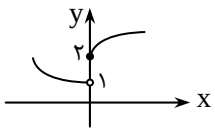
۱۵- با توجه به شکل تست ۱۳، حاصل $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) صفر ۳) $-\infty$ ۴) وجود ندارد.

۱۶- با توجه به شکل تست ۱۳، حاصل $\lim\limits_{x\to ۳^+}[f(x)]+[-f(x)]$ کدام است؟

۱) $-۱$ ۲) ۱ ۳) صفر ۴) وجود ندارد.

۱۷- نمودار $y=f(x)$ شکل مقابل است. مقدار $\lim\limits_{x\to ۱}(f(x^۲-۱)+f(۱-|x|))$ کدام است؟




۱) ۱ ۲) ۲
۳) ۳ ۴) وجود ندارد.

۱۸- در تابع $f(x)=\begin{cases} |x-۱| & x\neq ۱,-۱ \\ ۱ & x=-۱\end{cases}$ کدام گزینه درست است؟

۱) تابع فقط در $x=۱$ حد ندارد.
۲) تابع فقط در $x=-۱$ حد ندارد.
۳) تابع در $R$ حد دارد.
۴) تابع در $x=۱,-۱$ حد ندارد.

۱۹- اگر $f(x)=\begin{cases} -۳ & x\notin \mathbb{Z} \\ x^۲-۴ & x\in \mathbb{Z}\end{cases}$ ، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to -۴} f(x)$ کدام است؟

۱) $-۳$ ۲) ۱۲ ۳) $-۲۰$ ۴) وجود ندارد.

۲۰- تابع $f(x)=\begin{cases} ۲x & x\in \mathbb{R}-\mathbb{Z} \\ ۲ & x\in \mathbb{Z}\end{cases}$ در بازه‌ی $(-۳,۳)$ در چند نقطه حد ندارد؟

۱) پنج نقطه ۲) دو نقطه ۳) سه نقطه ۴) هیچ نقطه

۲۱- فرض کنید f تابعی زوج باشد و $\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)=-۳$ . آن‌گاه $\lim\limits_{x\to (-۲)^+} f(x)$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) $-۳$ ۳) صفر ۴) قابل تعیین نیست.

۲۲- اگر $f=\{(۲,۳),(۱/۹,۳/۹),(۱/۹۹,۳/۹۹),(۱/۹۹۹,۳/۹۹۹),...\}$ ، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۳/۹ ۴) وجود ندارد.

۲۳- اگر تابع f در $x=1$ حد داشته باشد و $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f^2(x)+4}{f(x)}=4$، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{f(x)}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) $\frac{3}{2}$

۲۴- اگر $f(x)=x!$، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to 3}f(x)$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۳ ۳) ۱ ۴) وجود ندارد.

۲۵- اگر برای هر $x\neq 0$ داشته باشیم: $2+\cos x\le f(x)-1\le x^2+3$، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۶- اگر به ازای هر $x\in R-\{4\}$ داشته باشیم: $|f(x)-3|\le 3(4-x)^2$، حاصل $\lim\limits_{x\to 3}\frac{f(x+1)+2}{2-f(2x-2)}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $-5$ ۳) $-3$ ۴) قابل تعیین نیست.

۲۷- کدام یک از توابع زیر در $x=0$ دارای حد است؟

۱) $f_1(x)=\sqrt{x^3-x^2}$ ۲) $f_2(x)=\frac{x}{|x|}-2[x]$

۳) $f_3(x)=\sqrt{x^2-x}+\sqrt{x^2+x}$ ۴) $f_4(x)=(-1)^{[x]}$

۲۸- حاصل $\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{[-x]\sqrt{x^2-4x+4}}{x-2}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $-2$ ۳) $-1$ ۴) ۲

۲۹- حاصل $\lim\limits_{x\to 1^-}(x+1)[\frac{1}{x+1}]$ کدام است؟

۱) $-1$ ۲) صفر ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۱

۳۰- مقدار $\lim\limits_{x\to 0^-}|[x]|+\lim\limits_{x\to 0^+}[|x|]$ کدام عدد است؟

۱) $-1$ ۲) ۱ ۳) صفر ۴) ۲

۳۱- حاصل $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x-|-2x|}{[x^3+\frac{1}{2}]-|x|}$ کدام است؟

۱) $-3$ ۲) ۳ ۳) ۱ ۴) $-1$

۳۲- با فرض $f(x)=\frac{x-|x|}{[1-x]-x}$، حاصل $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)-\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) $-2$ ۴) $-1$

۳۳- حاصل $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{[x^2]}{[x]}$ و $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{[x^2]}{[x]}$، به ترتیب کدام است؟

۱) صفر – وجود ندارد ۲) صفر – صفر ۳) وجود ندارد – وجود ندارد ۴) وجود ندارد – صفر

۳۴- تابع $f(x)=([-x]-3)(2[x]+a)$ در $x=1$ حد دارد. a کدام است؟

۱) ۳ ۲) $-4$ ۳) $-8$ ۴) $-10$

۳۵- اختلاف بین حد چپ و حد راست تابع $f(x)=[\frac{x}{2}]-[-\frac{x}{3}]$ در $x_0=6$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۱

۳۶- در تابع $y=[3x]+2[x]-[x^2]$، اگر $x\to 2$، حد راست از چپ چقدر بیش‌تر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) صفر

۳۷- حاصل $\lim[-\frac{1}{x}]$، وقتی $x \to (-\frac{1}{4})^-$، کدام است؟

۱) $-4$ ۲) $4$ ۳) $3$ ۴) $5$

۳۸- اگر $f(x)=[x]+[2x]+\cdots+[nx]$، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ کدام است؟

۱) $-n$ ۲) صفر ۳) $\frac{n+1}{2}$ ۴) $n$

۳۹- حاصل $\lim\limits_{x\to 10^-} \frac{[x^3]-x^3}{[x]-x}$ کدام است؟

۱) $-1$ ۲) صفر ۳) $1$ ۴) $10$

۴۰- اگر $a \in \mathbb{Z}$، مقدار $\lim\limits_{x\to a}([x]+[4-x])$ کدام است؟

۱) $2$ ۲) $3$ ۳) $4$ ۴) وجود ندارد.

۴۱- $a$ چقدر باشد تا تابع $f(x)=\begin{cases}[x-1]+[1-x] & x>1\\ a[x-3] & x<1\end{cases}$ در $x=1$ حد داشته باشد؟

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{1}{3}$

۴۲- اگر $f(x)=[1-x]$، آن‌گاه حاصل $\lim\limits_{x\to 1}(fof)(x)$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $1$ ۴) وجود ندارد.

۴۳- حاصل $\lim\limits_{x\to 0^+} \log[x]$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $-\infty$ ۳) $+\infty$ ۴) وجود ندارد.

۴۴- تابع با ضابطه‌ی $f(x)=[x]^3-[x]$، در چند نقطه با طول صحیح دارای حد است؟

۱) $1$ ۲) $2$ ۳) $3$ ۴) بی‌شمار

۴۵- تابع $f(x)=[x](3x^2+2x-1)$، در چند نقطه به طول صحیح حد دارد؟

۱) یک ۲) دو ۳) بی‌شمار ۴) هیچ‌نقطه

۴۶- تابع $f(x)=[x]\sin ax$ به ازای چه مقدار $a \neq 0$، در تمام نقاط صحیح حد دارد؟

۱) $\pi$ ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) $1$ ۴) هیچ مقدار $a \neq 0$

۴۷- تابع $f(x)=(x^3+ax^2+bx)[x-2]$ در نقاط $x=2$ و $x=3$ حد دارد. حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) $-11$ ۲) $-1$ ۳) $1$ ۴) $11$

۴۸- حاصل $\lim\limits_{x\to 1}[x^2-2x+5]$ کدام است؟

۱) $3$ ۲) $4$ ۳) $5$ ۴) وجود ندارد.

۴۹- حاصل $\lim[x^2+x]$، وقتی $x \to (-1)^+$، کدام است؟

۱) صفر ۲) $1$ ۳) $-1$ ۴) $-2$

۵۰- حاصل $\lim\limits_{x\to \pi^+} \frac{[\sin x]+[\cos x]}{[\sin x]}$ کدام است؟

۱) $2$ ۲) $-2$ ۳) $+\infty$ ۴) صفر

۵۱- حاصل $\lim\limits_{x\to 0}[-\cos x]$ کدام است؟

۱) $-1$ ۲) $-2$ ۳) صفر ۴) وجود ندارد.

۵۲- حاصل $\lim[\frac{1}{\sin x}]$، وقتی $x \to \frac{3\pi}{2}$، کدام است؟

۱) وجود ندارد. ۲) $-1$ ۳) $-2$ ۴) صفر

۵۳- حاصل $\lim[\cot x]$، وقتی $x \to (\frac{\pi}{4})^+$، کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۵۴- حاصل $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{[\tan x^3]}{\tan[x]}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $-\infty$ ۳) ۱ ۴) $\frac{1}{\tan 1}$

۵۵- حاصل $\lim\limits_{x\to 0^+}[x]\cot x$ و $\lim\limits_{x\to 0^+}[x]\cot[x]$، به ترتیب کدام است؟

۱) صفر – وجود ندارد. ۲) $-1$ – وجود ندارد. ۳) صفر – صفر ۴) وجود ندارد – وجود ندارد.

۵۶- حاصل $\lim[\sin x + \cos x]$، وقتی $x \to (\frac{\pi}{2})^-$، کدام است؟

۱) صفر ۲) $-1$ ۳) ۱ ۴) ۲

۵۷- حاصل $\lim\limits_{x\to 1}\sin^{-1}(\frac{1}{x-1})$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) وجود ندارد.

۵۸- کدام‌یک از حدود زیر موجود است؟

۱) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}[\sin x]$ ۲) $\lim\limits_{x\to 0^-}\cos^{-1}(1-x)$ ۳) $\lim\limits_{x\to 0}\tan^{-1}(\frac{1}{x})$ ۴) $\lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{2}}[\cos x]$

۵۹- کدام‌یک از حدود زیر وجود ندارد؟

۱) $\lim\limits_{x\to 0^+}\tan^{-1}(\frac{1}{x^2})$ ۲) $\lim\limits_{x\to 0^+}[x]\tan(\frac{\pi[x+1]}{2})$ ۳) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{[\cos x]}{|\sin x|}$ ۴) $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{[x^2]-\tan x}{\sin x}$

۶۰- تابع $y = \operatorname{sgn}[|x|]$ در چند نقطه حد ندارد؟

۱) در تمام نقاط حد دارد. ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) بی‌شمار

۶۱- حاصل $\lim x[\frac{1}{x}]$، وقتی $x \to 0$، کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) صفر ۴) وجود ندارد.

* ۶۲- اگر $\lim\limits_{x\to 0}(x^3+ax+b)[\frac{1}{x}] = 4$، آن‌گاه مقدار $a-b$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) صفر ۳) ۲ ۴) $-4$

* ۶۳- حاصل $\lim(2x^2+x-1)[\frac{2}{2x-1}]$، وقتی $x \to \frac{1}{2}$، کدام است؟

۱) صفر ۲) ۳ ۳) $-1$ ۴) حد ندارد.

۶۴- کدام دو دنباله بیانگر آن هستند که تابع $f(x) = \begin{cases} x & x \ge 0 \\ 1 & x < 0 \end{cases}$ در نقطه‌ای به طول صفر حد ندارد؟

۱) $\{\frac{1}{n}\}$ و $\{1-\frac{1}{n}\}$ ۲) $\{\frac{1}{2+n}\}$ و $\{\frac{-1}{n}\}$ ۳) $\{n\}$ و $\{\sqrt{n}\}$ ۴) $\{\frac{1}{n+1}\}$ و $\{\frac{1}{n+5}\}$

۶۵- کدام دو دنباله‌ی زیر نشان می‌دهد که $f(x) = [x]$ در $x = 1$ حد ندارد؟

۱) $\{1-\frac{1}{n!}\}$ و $\{1+\frac{1}{n!}\}$ ۲) $\{1-\frac{1}{\sqrt{n}}\}$ و $\{1-\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\}$ ۳) $\{\frac{2n+1}{n}\}$ و $\{\frac{2n-1}{n}\}$ ۴) $\{-\frac{1}{n}\}$ و $\{\frac{1}{n}\}$

۶۶- برای اثبات عدم وجود حد تابع $f(x)=\cos(\frac{\pi}{x})$ در $x=0$، کدام دنباله‌ها مناسب است؟

۱) $\{\frac{1}{2n}\}$ و $\{-\frac{1}{2n}\}$ ۲) $\{\frac{1}{n\pi}\}$ و $\{-\frac{1}{n\pi}\}$ ۳) $\{\frac{1}{2n}\}$ و $\{\frac{1}{2n+1}\}$ ۴) $\{\frac{-1}{2n+1}\}$ و $\{\frac{1}{2n+1}\}$

۶۷- کدام جفت از دنباله‌های زیر، عدم وجود حد تابع $f(x)=\begin{cases}1 & x\in Q\\ -1 & x\notin Q\end{cases}$ را در $x=0$ نشان می‌دهد؟

۱) $\{\frac{1}{n}\}$ و $\{\frac{-1}{n}\}$ ۲) $\{\frac{\sqrt{2}}{n}\}$ و $\{\frac{-\sqrt{2}}{n}\}$ ۳) $\{\frac{\pi}{n}\}$ و $\{-\frac{100}{n}\}$ ۴) $\{\frac{-\pi}{n}\}$ و $\{\frac{\sqrt{2}}{n}\}$

۶۸- اگر $\lim_{n\to\infty} f(\frac{1}{n})=0$، آن‌گاه کدام گزاره درباره‌ی حد تابع $f(x)$ در $x=0$ همواره درست است؟

۱) $\lim_{x\to 0} f(x)=0$ ۲) $\lim_{x\to 0^+} f(x)=0$ ۳) $\lim_{x\to 0^-} f(x)=0$ ۴) هیچ‌کدام

۶۹- اگر برای هر دنباله‌ی $\{a_n\}$ که $\lim_{n\to\infty} a_n=a$، داشته باشیم $\lim_{n\to\infty} f(a_n)=L$، آن‌گاه:

۱) $\forall\varepsilon>0\ \exists N\ \ni\ 0<|x-a|<N\to|f(a_N)-L|<\varepsilon$

۲) $\forall\varepsilon>0\ \exists N\ \ni\ 0<|x|<N\to|f(a_N)-L|<\varepsilon$

۳) $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \ni\ 0<|x|<\delta\to|f(x)-L|<\varepsilon$

۴) $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \ni\ 0<|x-a|<\delta\to|f(x)-L|<\varepsilon$

۷۰- اگر $\lim_{x\to 2^-} f(x)=0$ و دنباله‌ی $\{f(a_n)\}$ به عدد صفر همگرا باشد، کدام دنباله‌ی زیر می‌تواند دنباله‌ی $\{a_n\}$ باشد؟

۱) $\{2+\frac{2}{n}\}$ ۲) $\{\frac{2n+5}{n+2}\}$ ۳) $\{\frac{2n+3}{n+1}\}$ ۴) $\{\sqrt{n^2+4n}-n\}$

۷۱- اگر $f(x)=(3x+1)[2x]$ و $a_n=\frac{2n+1}{n+3}$، دنباله‌ی $\{f(a_n)\}$ به چه عددی همگرا است؟

۱) ۲۸ ۲) ۲۱ ۳) ۲۵ ۴) واگرا

۷۲- اگر $f(x)=(2x+1)[3x]$ و $a_n=\frac{(-1)^n}{n+1}$، دنباله‌ی $\{f(a_n)\}$ به چه عددی همگرا است؟

۱) ۱ ۲) صفر ۳) ۱- ۴) واگرا

۷۳- حاصل $\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2\sin^{-1}(\frac{1}{x-1})}{|x|}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) حد وجود ندارد.

۷۴- اگر $f$ تابعی باشد که در هیچ نقطه به‌جز $x=1$ حد نداشته باشد، $\lim_{x\to 1} f(x)\neq 0$ و بدانیم برای هر $x\in\mathbb{R}$: $|f(x)|\le 5$، آن‌گاه تابع $g(x)=(2x-1)f(x)$ دقیقاً درچند نقطه حد دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) صفر ۴) ۱

۷۵- با شرایط تست ۷۴، تابع $h(x)=\sqrt{2x-3}f(x)$ دقیقاً در چند نقطه حد دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

* ۷۶- با شرایط تست ۷۴، اگر تعریف کنیم $i(x)=\begin{cases}1 & x\in Q\\ 0 & x\notin Q\end{cases}$، تابع $y=i(x)f(x)$ دقیقاً در چند نقطه حد دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) صفر ۴) بی‌شمار

۷۷- اگر تابع $f(x)=(x^3+ax)\cos(\frac{1}{x-1})$ در $x=-1$ حد داشته باشد، مقدار $a$ کدام است؟

۱) ۱- ۲) ۱ ۳) هر مقدار حقیقی ۴) هیچ مقدار حقیقی

۷۸- اگر تابع $f(x)=(x^3+ax)\cos(\frac{1}{x-1})$ در $x=1$ حد داشته باشد، مقدار $a$ کدام است؟

۱) ۱- ۲) ۱ ۳) هر مقدار حقیقی ۴) هیچ مقدار حقیقی

۷۹- اگر $g(x)=\begin{cases}1 & x\in Q\\ 0 & x\in R-Q\end{cases}$ و $f(x)=\begin{cases}|x-1| & x\geq 1\\ [x] & x<1\end{cases}$، آن‌گاه حاصل $\lim\limits_{x\to 1} f(x)g(x)$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۱- ۴) وجود ندارد.

* ۸۰- اگر $D(x)=\begin{cases}1 & x\in Q\\ 0 & x\notin Q\end{cases}$، تابع $f(x)=(x^3+4x-4)D(x)$ در چند نقطه دارای حد است؟

۱) هیچ ۲) یک ۳) سه ۴) بی‌شمار

۸۱- اگر $f(x)=\begin{cases}2 & x\in Q\\ 3 & x\in R-Q\end{cases}$، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to 4}(fof)(x)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) وجود ندارد.

* ۸۲- اگر $g(x)=\begin{cases}x^2 & x\in Q\\ 0 & x\in R-Q\end{cases}$ و $f(x)=[x]+[-x]$، حاصل $\lim\limits_{x\to 0} f(g(x))$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱- ۳) ۱ ۴) وجود ندارد.

* ۸۳- اگر $f(x)=\begin{cases}4 & x\in Q\\ -1 & x\notin Q\end{cases}$، آن‌گاه تابع با ضابطه‌ی $g(x)=[x-3]f(x)$، در کدام مجموعه حد دارد؟

۱) $[3,4)$ ۲) $[3,+\infty)$ ۳) $(3,4)$ ۴) $\{3\}$

۸٤- تابع $f(x)=\begin{cases}x^2 & x\in Q\\ 2-x & x\in R-Q\end{cases}$ در چند نقطه حد دارد؟

۱) یک نقطه ۲) دو نقطه ۳) سه نقطه ۴) چهار نقطه

۸۵- اگر $a_n=\frac{4n+1}{2n+1}$ و $f(x)=b+[2x]$، به ازای کدام مقدار b، دنباله‌ی $\{f(a_n)\}$ به عدد ۱ همگراست؟ **(سراسری - ۸۵)**

۱) ۳- ۲) ۲- ۳) ۱ ۴) نشدنی

۸٦- اگر $f(x)=\begin{cases}ax-1 & x<1\\ x^2+2a & x\geq 1\end{cases}$ و $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)-\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-1$، مقدار a کدام است؟ **(سراسری - ۸٦)**

۱) ۴- ۲) ۳- ۳) ۲- ۴) ۱-

۸۷- در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x} & x>0\\ -\sqrt{1+x} & x\leq 0\end{cases}$، حاصل $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x^3-x)$ کدام است؟ **(سراسری - ۸۹)**

۱) ۱- ۲) صفر ۳) ۱ ۴) موجود نیست.

۸۸- اگر $a_n=\frac{n+1}{n}$ و $f(x)=\frac{2x+[-x]}{x^2-1}$، آن‌گاه دنباله‌ی $\{f(a_n)\}$ به کدام عدد همگرا است؟ **(سراسری - ۸۹)**

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) همگرا نیست.

۸۹- اگر $a_n=\frac{2n^2+b}{n^2+3n}$ و $f(x)=\sqrt{x^2-x-2}$، به ازای کدام مقدار b، دنباله‌ی $\{f(a_n)\}$ همگرا است؟ **(سراسری خارج از کشور - ۸۵)**

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) هر مقدار b ۴) هیچ مقدار b

۹۰- اگر $f(x)=\frac{[x]-3}{x-4}$ و $a_n=\frac{4n-3}{n+2}$، آن‌گاه دنباله‌ی $\{f(a_n)\}$ چگونه است؟ **(سراسری خارج از کشور - ۸۷)**

۱) همگرا به ۱- ۲) همگرا به صفر ۳) همگرا به ۱ ۴) واگرا

۹۱- اگر $a_n=\frac{(-1)^n}{2n}$ و $f(x)=|[\frac{x}{2}]|$، آن‌گاه دنباله‌ی $\{f(a_n)\}$ به کدام عدد همگرا است؟ **(سراسری خارج از کشور - ۸۹)**

۱) صفر ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) همگرا نیست.

WWW.BIAZISARA.IR

WWW.RIAZISARA.IR

فصل ۳

# مفاهیم مقدماتی حد

## پاسخ‌های تشریحی

B **۱- گزینه‌ی (۲)** از فرض سؤال نتیجه می‌گیریم: $0<|x-3|<\frac{1}{3}$. حال نامساوی دوم را بررسی می‌کنیم:

$$\left|\frac{x^2-3x}{2x-6}-\frac{3}{2}\right|<\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{x(x-3)}{2(x-3)}-\frac{3}{2}\right|<\varepsilon \xrightarrow{x\neq 3} \left|\frac{x-3}{2}\right|<\varepsilon \Rightarrow |x-3|<2\varepsilon$$

برای آن‌که از فرض، نامساوی اخیر را بتوان نتیجه گرفت، باید $2\varepsilon \geq \frac{1}{3}$، یعنی $\varepsilon \geq \frac{1}{6}$. پس کم‌ترین مقدار $\varepsilon$، $\frac{1}{6}$ است.

B **۲- گزینه‌ی (۴)** شرط اول معادل $0<|x-4|<\frac{1}{2}$ است. شرط دوم را ساده می‌کنیم: (با فرض $x\neq 4$)

$$\left|\frac{x^2-4x}{3x-12}-\frac{4}{3}\right|<\beta \Leftrightarrow \left|\frac{x(x-4)}{3(x-4)}-\frac{4}{3}\right|<\beta \Leftrightarrow \left|\frac{x-4}{3}\right|<\beta \Leftrightarrow |x-4|<3\beta$$

برای آن‌که از فرض، نامساوی اخیر را بتوان نتیجه گرفت، باید $3\beta \geq \frac{1}{2}$، یعنی: $\beta \geq \frac{1}{6}$، و تنها گزینه‌ی (۴) در این شرط صدق می‌کند.

B **۳- گزینه‌ی (۳)** شرط قرار گرفتن مقادیر $f(x)$ در بازه‌ی $(2/96\ ,\ 3/04)$ معادل شرط $|f(x)-3|<0/04$ است. حال داریم:

$$|f(x)-3|<0/04 \Leftrightarrow \left|\frac{2x^2-x-1}{x-1}-3\right|<0/04 \Leftrightarrow \left|\frac{(2x+1)(x-1)}{x-1}-3\right|<0/04 \xrightarrow{x\neq 1} |2x+1-3|<0/04$$
$$\Rightarrow 2|x-1|<0/04 \Rightarrow |x-1|<0/02$$

پس بزرگ‌ترین مقدار $\delta$ که در این شرایط صدق می‌کند، $\delta=0/02$ است.

B **۴- گزینه‌ی (۱)** نامساوی $0/999<f(x)<1/001$، معادل نامساوی $|f(x)-1|<0/001$ است. با توجه به این‌که $f(x)=(x-1)^3+1$، داریم:

$$|f(x)-1|<\frac{1}{1000} \Leftrightarrow |(x-1)^3|<\frac{1}{1000} \Leftrightarrow |x-1|<\frac{1}{10} \Rightarrow \frac{9}{10}<x<\frac{11}{10}$$

B **۵- گزینه‌ی (۴)** داریم $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=3\times 1-1=2$، پس باید $|f(x)-2|<0/01$. می‌دانیم به‌ازای $0<|x-1|<\delta$ داریم: $f(x)=3x-1$. بنابراین نامساوی بالا را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$|f(x)-2|<0/01 \Leftrightarrow |3x-1-2|<0/01 \Leftrightarrow 3|x-1|<0/01 \Leftrightarrow |x-1|<\frac{1}{300}$$

پس بیش‌ترین مقدار $\delta$، همان $\frac{1}{300}$ است.

C **۶- گزینه‌ی (۴)** باید همسایگی راست و چپ نقطه‌ی ۳ را جداگانه بررسی کنیم: (دقت کنید که $0<|x-3|<\delta$، معادل $-\delta<x-3<\delta$ و $x\neq 3$ است)

اگر $0<x-3<\delta$ : $|f(x)-7|<0/1 \Leftrightarrow |2x+1-7|<0/1 \Leftrightarrow 2|x-3|<0/1 \Leftrightarrow |x-3|<0/05$

اگر $-\delta<x-3<0$ : $|f(x)-7|<0/1 \Leftrightarrow |5x-8-7|<0/1 \Leftrightarrow 5|x-3|<0/1 \Leftrightarrow |x-3|<0/02$

برای آن‌که در هردو همسایگی چپ و راست شرط $|f(x)-7|<0/1$ برقرار باشد، باید $\delta\leq 0/05$ و $\delta\leq 0/02$، یعنی بزرگ‌ترین مقدار ممکن برای $\delta$، $0/02$ است، و تنها گزینه‌ی (۴) در این شرط صدق می‌کند.

B **۷- گزینه‌ی (۳)** همسایگی راست و چپ $x=1$ را جداگانه بررسی می‌کنیم: (دقت کنید که $|x-1|\leq a$ معادل $-a\leq x-1\leq a$ است)

اگر $0\leq x-1\leq a$ : $|f(x)-1|\leq 0/1 \Leftrightarrow |\sqrt{x-1}+1-1|\leq 0/1 \Leftrightarrow \sqrt{x-1}\leq 0/1 \Leftrightarrow 0\leq x-1\leq 0/01$

اگر $-a\leq x-1<0$ : $|f(x)-1|\leq 0/1 \Leftrightarrow |2x-1-1|\leq 0/1 \Leftrightarrow 2|x-1|\leq 0/1 \Leftrightarrow 1-x\leq 0/05$

پس برای آن‌که در همسایگی راست $x=1$، شرط $|f(x)-1|\leq 0/1$ برقرار باشد، کافی است $a\leq 0/01$، و برای آن‌که در همسایگی چپ آن، این شرط برقرار باشد، کافی است $a\leq 0/05$. پس بزرگ‌ترین مقدار $a$ که در دو شرط صدق می‌کند $a=0/01$ است.

C **۸- گزینه‌ی (۳)** قرار گرفتن $f(x)$ در بازه‌ی $(۶/۹۷,۷/۰۳)$ معادل شرط $|f(x)-۷|<۰/۰۳$ است. باید همسایگی راست و چپ نقطه‌ی $x=۲$ را جداگانه بررسی کنیم:

اگر $۰<x-۲<\delta$ : $|f(x)-۷|<۰/۰۳ \Leftrightarrow |\frac{(۳x-۱)(۳x+۱)}{۳x-۱}-۷|<۰/۰۳ \Leftrightarrow |۳x+۱-۷|<۰/۰۳$

$\Leftrightarrow ۳|x-۲|<۰/۰۳ \Leftrightarrow |x-۲|<۰/۰۱$

اگر $-\delta<x-۲<۰$ : $|f(x)-۷|<۰/۰۳ \Leftrightarrow |۴x-۱-۷|<۰/۰۳ \Leftrightarrow ۴|x-۲|<۰/۰۳ \Leftrightarrow |x-۲|<۰/۰۰۷۵$

برای آن‌که در هردو همسایگی چپ و راست شرط $|f(x)-۷|<۰/۰۳$ برقرار باشد، باید هردو شرط $\delta\le ۰/۰۱$ و $\delta\le ۰/۰۰۷۵$ برقرار باشد. پس بزرگ‌ترین مقدار $\delta$، ۰/۰۰۷۵ است.

C **۹- گزینه‌ی(۱)** نشان می‌دهیم گزینه‌ی (۱) همواره درست است.

$$\begin{cases}|x|<\varepsilon^۲ \Rightarrow \sqrt{|x|}<\varepsilon \\ |\sin(\frac{۱}{x})|\le ۱\end{cases} \Rightarrow \sqrt{|x|}\,|\sin(\frac{۱}{x})|<\varepsilon \Rightarrow |f(x)|<\varepsilon$$

**یادداشت:** از این نامساوی می‌توان برای اثبات تساوی $\lim\limits_{x\to ۰} f(x)=۰$ استفاده کرد.

D **۱۰- گزینه‌ی (۱)** می‌دانیم $\lim\limits_{x\to ۰/۶}[x+۰/۳]=[۰/۹]=۰$ ، بنابراین باید بیش‌ترین مقدار $\delta$ را به گونه‌ای پیدا کنیم که اگر $۰<|x-۰/۶|<\delta$، آن‌گاه: $|[x+۰/۳]-۰|<۰/۰۱$. چون $[x+۰/۳]$ یک عدد صحیح است، شرط $|[x+۰/۳]|<۰/۰۱$ به معنی $[x+۰/۳]=۰$ است، بنابراین:

$[x+۰/۳]=۰ \Rightarrow ۰\le x+۰/۳<۱ \xrightarrow{-۰/۹} -۰/۹\le x-۰/۶<۰/۱$

پس بزرگ‌ترین عدد $\delta$ که برای آن $۰<|x-۰/۶|<\delta$، $\delta=۰/۱$ است.

A **۱۱- گزینه‌ی (۱)** باید حدهای چپ و راست تابع در $x=۲$ با هم برابر باشند:

$\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x) \Rightarrow ۲m-۲=۲+۴m \Rightarrow m=-۲ \Rightarrow f(-۵)=|-۵|+۴\times(-۲)=-۳$

A **۱۲- گزینه‌ی (۳)** در گزینه‌های (۲) و (۴) تابع در $x=۰$ حد دارد. در گزینه‌ی (۱) تابع نه حد راست دارد، نه حد چپ. در گزینه‌ی (۳) تابع هم حد راست دارد، هم حد چپ، ولی این دو حد نابرابرند.

A **۱۳- گزینه‌ی (۲)** با توجه به شکل وقتی از سمت راست به صفر نزدیک می‌شویم، مقدار تابع به ۱- نزدیک می‌شود (روی نمودار به سمت نقطه‌ی توخالی $(۰,-۱)$ پیش می‌رویم).

B **۱۴- گزینه‌ی (۱)** وقتی از سمت چپ به صفر نزدیک می‌شویم، مقادیر تابع به سمت عدد ۱ نزدیک می‌شوند و بزرگ‌تر از ۱ هستند، پس $[f(x)]$ نیز به سمت ۱ نزدیک می‌شود.

A **۱۵- گزینه‌ی (۴)** چون نه همسایگی چپ و نه همسایگی راست $x=۲$ در دامنه‌ی تابع حضور ندارد، پس تابع در این نقطه نیز حد ندارد.

B **۱۶- گزینه‌ی (۱)** می‌دانیم: $[\alpha]+[-\alpha]=\begin{cases}۰ & \alpha\in\mathbb{Z}\\ -۱ & \alpha\notin\mathbb{Z}\end{cases}$، پس وقتی $x\to ۳^+$، طبق نمودار داریم: $[f(x)]+[-f(x)]=-۱$، بنابراین حد موردنظر نیز برابر ۱- می‌شود.

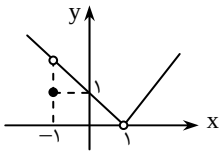
B **۱۷- گزینه‌ی (۳)** ابتدا حد راست عبارت را در $x=۱$ به‌دست می‌آوریم:

$x\to ۱^+ : x>۱ \Rightarrow t=x^۲-۱>۰ \;,\; h=۱-|x|<۰$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to ۱^+} f(x^۲-۱)+\lim\limits_{x\to ۱^+} f(۱-|x|)=\lim\limits_{t\to ۰^+} f(t)+\lim\limits_{h\to ۰^-} f(h)=۲+۱=۳$

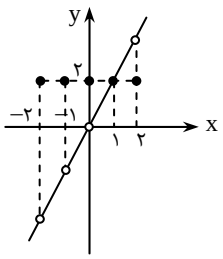
به همین ترتیب ثابت می‌شود حد چپ عبارت نیز برابر ۳ است، پس حد عبارت برابر ۳ است.

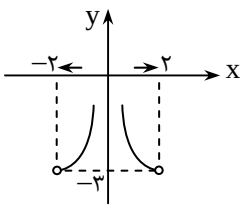
B **۱۸- گزینه‌ی (۳)** با توجه به نمودار تابع مشخص است که تابع در R حد دارد، هرچند که در نقطه‌ی $x=۱$ مقدار ندارد و در نقطه‌ی $x=-۱$ مقدار حد با مقدار تابع متفاوت است.




B **۱۹- گزینه‌ی (۱)** در بازه‌های $(-۴,-۳)$ و $(-۵,-۴)$ (یعنی همسایگی‌های $x=-۴$) داریم: $f(x)=-۳$.
پس مقدار حد نیز برابر ۳- می‌شود.

B **۲۰- گزینه‌ی (۴)** نمودار تابع یک خط راست است که نقاط با طول صحیح روی آن توخالی شده‌اند و تنها در $x=۱$ است که نقطه‌ی توپر متناظر روی خط قرار گرفته. بنابراین در تمام نقاط بازه، تابع حد دارد، هرچند که در نقاط با طول‌های ۲-، ۱-، ۰ و ۲، حد تابع با مقدار آن فرق دارد.






**B** **۲۱- گزینه‌ی (۲)** می‌دانیم نمودار توابع زوج نسبت به محور yها متقارن است. وقتی $\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x) = -۳$ ، مطابق شکل با نزدیک شدن به $x = ۲$ از سمت چپ، روی نمودار به نقطه‌ای با عرض $y = -۳$ نزدیک می‌شویم. پس در قرینه‌ی آن، با نزدیک شدن به $x = -۲$ از سمت راست، بازهم به نقطه‌ای با عرض $y = -۳$ نزدیک می‌شویم. یعنی $\lim\limits_{x\to(-۲)^+} f(x) = -۳$ .

**B** **۲۲- گزینه‌ی (۴)** با توجه به آن‌که نمودار تابع از نقاط گسسته تشکیل شده، همسایگی نقطه‌ی $x = ۲$ در دامنه‌ی تابع حضور ندارد و تابع حد ندارد.

**A** **۲۳- گزینه‌ی(۱)** اگر فرض کنیم $\lim\limits_{x\to ۱} f(x) = L$ ، آن‌گاه داریم:

$$\lim_{x\to ۱}\frac{f^۲(x)+۴}{f(x)} = \frac{L^۲+۴}{L} \Rightarrow \frac{L^۲+۴}{L} = ۴ \Rightarrow L^۲ - ۴L + ۴ = ۰ \Rightarrow L = ۲ \Rightarrow \lim_{x\to ۱}\frac{۱}{f(x)} = \frac{۱}{۲}$$

**B** **۲۴- گزینه‌ی(۴)** دقت کنید که دامنه‌ی تابع f، اعداد حسابی $(\mathbb{N}\cup\{۰\})$ است، پس در هیچ نقطه‌ای حد ندارد.

**A** **۲۵- گزینه‌ی(۴)** می‌توانیم از قضیه‌ی فشردگی استفاده کنیم:

$$\lim_{x\to ۰}(۲+\cos x) = \lim_{x\to ۰}(x^۲+۳) = ۳ \xrightarrow{\text{فشردگی}} \lim_{x\to ۰}(f(x)-۱) = ۳ \Rightarrow \lim_{x\to ۰} f(x) = ۳+۱ = ۴$$

**B** **۲۶- گزینه‌ی (۲)** با استفاده از قضیه‌ی فشردگی، حد تابع f را به‌دست می‌آوریم:

$$۰ \le |f(x)-۳| \le ۳(۴-x)^۲ \quad , \quad \lim_{x\to ۴} ۳(۴-x)^۲ = ۰ \xrightarrow{\text{فشردگی}} \lim_{x\to ۴}|f(x)-۳| = ۰ \Rightarrow \lim_{x\to ۴} f(x) = ۳$$

$$\lim_{x\to ۳}\frac{f(x+۱)+۲}{۲-f(۲x-۲)} = \lim_{t\to ۴}\frac{f(t)+۲}{۲-f(t)} = \frac{۳+۲}{۲-۳} = -۵$$

**C** **۲۷- گزینه‌ی(۲)** در گزینه‌ی (۱)، چون $x^۳ - x^۲ = x^۲(x-۱)$ ، دامنه‌ی تابع $(-\infty,-۱]\cup\{۰\}\cup[۱,+\infty)$ می‌شود و همسایگی $x = ۰$ در دامنه حضور ندارد. در گزینه‌ی (۳) اشتراک دو محدوده‌ی جواب $x(x+۱)\ge ۰$ و $x(x-۱)\ge ۰$ ، به دامنه‌ی $(-\infty,-۱]\cup\{۰\}\cup[۱,+\infty)$ برای تابع $f_۳$ منجر می‌شود و بازهم همسایگی موردنظر وجود ندارد. در گزینه‌ی (۴)، به وضوح داریم: $\lim\limits_{x\to ۰^+} f_۴(x) = ۱$ و $\lim\limits_{x\to ۰^-} f_۴(x) = (-۱)^{-۱} = -۱$ ، پس $f_۴$ در $x = ۰$ حد ندارد. ولی برای گزینه‌ی (۲) داریم:

$$\lim_{x\to ۰^+} f_۲(x) = \lim_{x\to ۰^+}\left(\frac{x}{x} - ۲[x]\right) = ۱ - ۲\times ۰ = ۱ \quad , \quad \lim_{x\to ۰^-} f(x) = \lim_{x\to ۰^-}\left(\frac{x}{-x} - ۲[x]\right) = -۱ - ۲\times(-۱) = ۱$$

**B** **۲۸- گزینه‌ی(۴)** با توجه به این‌که $x \to ۲^-$ ، به جای جزء صحیح موجود در کسر، مقدار عددی آن را قرار می‌دهیم:

$$x \to ۲^- \Rightarrow x < ۲ \Rightarrow -x > -۲ \Rightarrow -x \to (-۲)^+ \Rightarrow \text{جواب} = \lim_{x\to ۲^-}\frac{[(-۲)^+]\sqrt{(x-۲)^۲}}{x-۲}$$

$$= \lim_{x\to ۲^-}\frac{-۲|x-۲|}{x-۲} = \lim_{x\to ۲^-}\frac{۲(x-۲)}{x-۲} = ۲$$

**A** **۲۹- گزینه‌ی (۲)** وقتی $x \to ۱^-$ ، داریم $\frac{۱}{x+۱} \to \frac{۱}{۲}$ و چون $\frac{۱}{۲}$ عددی غیرصحیح است، می‌توانیم بنویسیم:

$$[\frac{۱}{x+۱}] = ۰ \Rightarrow \lim_{x\to ۱^-}(x+۱)[\frac{۱}{x+۱}] = ۰$$

**B** **۳۰- گزینه‌ی(۲)** مقدار دو حد را جداگانه حساب می‌کنیم:

$$x \to ۰^+ \Rightarrow x > ۰ \Rightarrow |x| = x \Rightarrow \lim_{x\to ۰^+}[|x|] = \lim_{x\to ۰^+}[x] = [۰^+] = ۰$$

$$x \to ۰^- \Rightarrow [x] = -۱ \Rightarrow \lim_{x\to ۰^-}|[x]| = |-۱| = ۱$$

**B** **۳۱- گزینه‌ی (۲)** وقتی $x \to ۰^-$ ، چون $x < ۰$ ، داریم: $|x| = -x$ و $|-۲x| = -۲x$ ، هم‌چنین چون $x^۳ + \frac{۱}{۲} \to \frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۲}$ عددی غیر صحیح است، $[x^۳ + \frac{۱}{۲}]$ به همان $[\frac{۱}{۲}] = ۰$ نزدیک می‌شود. بنابراین:

$$\text{مقدار حد} = \lim_{x\to ۰^-}\frac{x-(-۲x)}{۰-(-x)} = \lim_{x\to ۰^-}\frac{۳x}{x} = ۳$$

**B** **۳۲- گزینه‌ی(۱)** مقدار دو حد را جداگانه حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x) = \lim_{x\to ۰^+}\frac{x-x}{[۱^-]-x} = \frac{\text{صفر مطلق}}{\text{صفر حدی}} = ۰ \quad , \quad \lim_{x\to ۰^-} f(x) = \lim_{x\to ۰^-}\frac{x+x}{[۱^+]-x} = \lim_{x\to ۰^-}\frac{۲x}{۱-x} = ۰$$

B **۳۳- گزینه‌ی (۴)** در تابع مورد نظر همسایگی راست $x=0$ در دامنه‌ی تابع حضور ندارد، زیرا برای $0 \le x < 1$ مخرج کسر صفر می‌شود، پس حد اول وجود ندارد. ولی وقتی $x \to 0^-$، داریم: $[x]=-1$ و $[x^2]=0$، پس حاصل حد دوم برابر صفر می‌شود.

B **۳۴- گزینه‌ی (۴)** باید حدهای راست و چپ تابع در $x=1$ با هم برابر باشند:

$$x \to 1^+ : x > 1 \Rightarrow -x < -1 \Rightarrow \lim_{x\to 1^+} f(x) = ([(-1)^-]-3)(2[1^+]+a) = (-2-3)(2+a) = -5(2+a)$$

$$x \to 1^- : x < 1 \Rightarrow -x > -1 \Rightarrow \lim_{x\to 1^-} f(x) = ([(-1)^+]-3)(2[1^-]+a) = (-1-3)(0+a) = -4a$$

برای حد داشتن تابع در $x=1$، باید $-5(2+a) = -4a$، که نتیجه می‌دهد: $a=-10$.

B **۳۵- گزینه‌ی (۲)** حدهای چپ و راست را جداگانه حساب می‌کنیم:

$$x \to 6^+ \Rightarrow x > 6 \Rightarrow \frac{x}{2} > 3 \ , \ \frac{x}{3} > 2 \Rightarrow -\frac{x}{3} < -2 \Rightarrow \lim_{x\to 6^+} f(x) = [3^+]-[(-2)^-] = 3-(-3) = 6$$

$$x \to 6^- \Rightarrow x < 6 \Rightarrow \frac{x}{2} < 3 \ , \ \frac{x}{3} < 2 \Rightarrow -\frac{x}{3} > -2 \Rightarrow \lim_{x\to 6^-} f(x) = [3^-]-[(-2)^+] = 2-(-2) = 4$$

B **۳۶- گزینه‌ی (۲)** حدهای چپ و راست را جداگانه حساب می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} x \to 2^+ \Rightarrow 3x \to 6^+ \quad , \quad x^2 \to 4^+ \Rightarrow \lim\limits_{x\to 2^+} y = 6+2\times 2-4 = 6 \\ x \to 2^- \Rightarrow 3x \to 6^- \quad , \quad x^2 \to 4^- \Rightarrow \lim\limits_{x\to 2^-} y = 5+2\times 1-3 = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{جواب} = 6-4 = 2$$

B **۳۷- گزینه‌ی (۳)** مقدار عبارت $-\frac{1}{x}$ به ازای $x=-\frac{1}{4}$ عددی صحیح است. پس به بررسی دقیق‌تری احتیاج داریم:

$$x \to (-\frac{1}{4})^- \Rightarrow x < -\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{x} > -4 \Rightarrow -\frac{1}{x} < 4 \Rightarrow -\frac{1}{x} \to 4^- \Rightarrow \lim_{x\to(\frac{-1}{4})^-} [-\frac{1}{x}] = [4^-] = 3$$

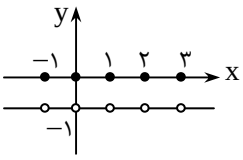
B **۳۸- گزینه‌ی (۱)** وقتی $x \to 0^-$، داریم: $2x \to 0^-$، $3x \to 0^-$، ... و $nx \to 0^-$. بنابراین:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \underbrace{[0^-]+\cdots+[0^-]}_{n\ \text{بار}} = \underbrace{-1-1-\ldots-1}_{n} = -n$$

B **۳۹- گزینه‌ی (۳)** وقتی $x \to 10^-$ داریم:

$$x < 10 \Rightarrow x^3 < 1000 \Rightarrow \lim_{x\to 10^-} \frac{[x^3]-x^3}{[x]-x} = \frac{[1000^-]-1000}{[10^-]-10} = \frac{999-1000}{9-10} = 1$$

B **۴۰- گزینه‌ی(۲)** داریم: $[x]+[4-x] = 4+[x]+[-x]$، و می‌دانیم: $[x]+[-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$.




پس طبق نمودار تابع $y=[x]+[-x]$، در همه‌ی نقاط $a \in R$ داریم: $\lim\limits_{x\to a}[x]+[-x] = -1$، بنابراین:

$$\lim_{x\to a} 4+[x]+[-x] = 3$$

C **۴۱- گزینه‌ی (۲)** ضابطه‌ی اول تابع به فرم $[\alpha]+[-\alpha]$ درمی‌آید که در همه‌ی نقاط حدی برابر ۱- دارد، پس: $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -1$. برای ضابطه‌ی دوم داریم:

$$x \to 1^- \Rightarrow x < 1 \Rightarrow x-3 < -2 \Rightarrow x-3 \to (-2)^- \Rightarrow \lim_{x\to 1^-} f(x) = a[(-2)^-] = -3a$$

پس باید $-3a = -1$، که نتیجه می‌دهد: $a = \frac{1}{3}$.

C **۴۲- گزینه‌ی(۴) راه اول:** همسایگی‌های چپ و راست را جداگانه بررسی می‌کنیم:

$$x \to 1^+ : x > 1 \Rightarrow 1-x < 0 \Rightarrow \lim_{x\to 1^+} f(x) = [0^-] = -1$$

$$x \to 1^- : x < 1 \Rightarrow 1-x > 0 \Rightarrow \lim_{x\to 1^-} f(x) = [0^+] = 0$$

برای $1 < x < 2$ داریم: $f(x) = -1$ و برای $0 < x < 1$ داریم: $f(x) = 0$. پس برای $1 < x < 2$ داریم: $(fof)(x) = f(-1) = 2$ و برای $0 < x < 1$ داریم: $(fof)(x) = f(0) = 1$، یعنی تابع $(fof)$ در نقطه‌ی $x=1$ حد ندارد.

**راه دوم:** ضابطه‌ی تابع $fof$ را تشکیل می‌دهیم. داریم: $(fof)(x) = [1-f(x)]$، و می‌دانیم $f(x)$ همواره عددی صحیح است، پس می‌توانیم جزء صحیح را حذف کنیم. یعنی:

$$(fof)(x) = 1-f(x) = 1-[1-x] = 1-1-[-x] = -[-x]$$

تابع حاصل در همه‌ی نقاط با طول صحیح حد ندارد.

A **۴۳- گزینه‌ی (۴)** چون به ازای $0 \le x < 1$، داریم: $[x]=0$ و $\log(0)$ تعریف نشده است، پس همسایگی راست $x=0$ در دامنه‌ی تابع حضور ندارد، بنابراین حد نیز وجود ندارد.

C **۴۴- گزینه‌ی (۲)** فرض کنید در نقطه‌ی $x=n$ که $n \in \mathbb{Z}$، تابع حد داشته باشد. در این صورت:

$$\lim_{x\to n^+} f(x) = \lim_{x\to n^-} f(x) \Rightarrow [n^+]^3 - [n^+] = [n^-]^3 - [n^-] \Rightarrow n^3 - n = (n-1)^3 - (n-1)$$

$$\Rightarrow n^3 - n = n^3 - 3n^2 + 3n - 1 - n + 1 \Rightarrow 3n(n-1) = 0 \Rightarrow n = 0 \,,\, n = 1$$

B **۴۵- گزینه‌ی (۱)** تابع تنها در نقاطی با طول صحیح حد دارد که برای آن‌ها $3x^2+2x-1$ در نقش عامل صفر کننده ظاهر شود، یعنی در ریشه‌های آن. چون $3x^2+2x-1=(3x-1)(x+1)$، تنها ریشه‌ی صحیح عبارت $x=-1$ است.

B **۴۶- گزینه‌ی (۱)** باید به‌ازای تمام مقادیر صحیح $x=k$، عبارت $\sin(ak)$ در نقش عامل صفرکننده ظاهر شود، یعنی $\sin(ak)=0$. و می‌دانیم این امر برای $a=\pi$ اتفاق می‌افتد (به طور کلی a می‌تواند هر مضرب صحیحی از $\pi$ باشد).

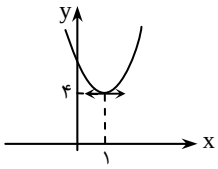
C **۴۷- گزینه‌ی (۳)** تابع $y=[x-2]$ در هیچ نقطه‌ای با طول صحیح حد ندارد. پس باید در نقاط $x=2$ و $x=3$ عبارت $x^3+ax^2+bx$ در نقش عامل صفرکننده ظاهر شود. یعنی دو ریشه‌ی $x=2$ و $x=3$ داشته باشد. بنابراین:

$$x^3+ax^2+bx = x(x^2+ax+b) = x(x-2)(x-3) \Rightarrow x(x^2+ax+b) = x(x^2-5x+6)$$

پس $a=-5$، $b=6$ و بنابراین: $a+b=1$

**تذکر:** دقت کنید که تابع f علاوه بر دو نقطه‌ی ذکر شده، در نقطه‌ی $x=0$ نیز حد دارد.

B **۴۸- گزینه‌ی (۲)** **راه اول:** باتوجه به نمودار $y=x^2-2x+5$، وقتی $x\to 1$، چه از چپ و چه از راست، مقدار y به سمت ۴ از مقادیر بزرگ‌تر از ۴ نزدیک می‌شود. یعنی: $y\to 4^+$. بنابراین: $\lim_{x\to 1}[x^2-2x+5]=[4^+]=4$

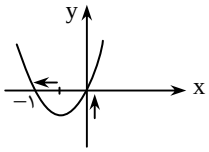



**راه دوم:** با توجه به $x^2-2x+5=(x-1)^2+4$، وقتی $x\to 1$ داریم:

$$(x-1)^2>0 \,,\, (x-1)^2\to 0 \Rightarrow x^2-2x+5>4 \;,\; x^2-2x+5\to 4$$

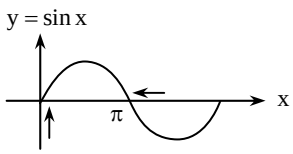
$$\Rightarrow \lim_{x\to 1}[x^2-2x+5]=4$$

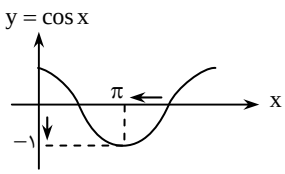
B **۴۹- گزینه‌ی (۳)** می‌دانیم وقتی $x\to -1$، داریم: $\lim(x^2+x)=0$. برای تعیین حد تابع اصلی به نمودار $y=x^2+x$ دقت کنید. طبق این نمودار وقتی $x\to(-1)^+$، $x^2+x\to 0^-$، بنابراین: $\lim_{x\to(-1)^+}[x^2+x]=[0^-]=-1$




C **۵۰- گزینه‌ی (۱)** طبق نمودارهای $y=\sin x$ و $y=\cos x$، وقتی $x\to\pi^+$، داریم: $\sin x\to 0^-$ و $\cos x\to(-1)^+$. بنابراین:

$$\lim_{x\to\pi^+}\frac{[\sin x]+[\cos x]}{[\sin x]} = \frac{[0^-]+[(-1)^+]}{[0^-]} = \frac{-1+(-1)}{-1} = 2$$



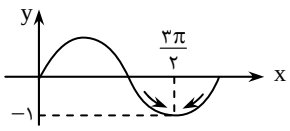




B **۵۱- گزینه‌ی (۱)** با توجه به دایره‌ی مثلثاتی یا نمودار $y=\cos x$، وقتی $x\to 0$، چه از چپ و چه از راست، داریم: $\cos x\to 1^-$. بنابراین:

$$\cos x<1 \Rightarrow -\cos x>-1 \Rightarrow \lim_{x\to 0}[-\cos x]=[(-1)^+]=-1$$

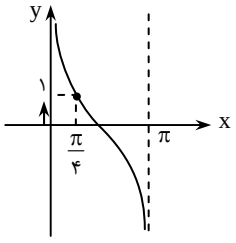
C **۵۲- گزینه‌ی (۳)** وقتی $x\to\frac{3\pi}{2}$، چه از چپ و چه از راست، طبق دایره‌ی مثلثاتی یا نمودار $y=\sin x$ داریم: $\sin x\to(-1)$ و $\sin x>-1$. یعنی $\sin x\to(-1)^+$. حال داریم:

$$0>\sin x>-1 \Rightarrow \frac{1}{\sin x}<-1 \Rightarrow \frac{1}{\sin x}\to(-1)^- \Rightarrow \lim_{x\to(\frac{3\pi}{2})}[\frac{1}{\sin x}]=[(-1)^-]=-2$$

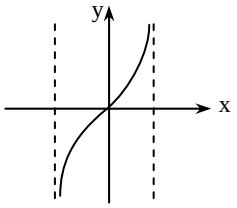



B **۵۳- گزینه‌ی (۱)** با توجه به دایره‌ی مثلثاتی یا نمودار $y=\cot x$، وقتی $x\to(\frac{\pi}{4})^+$، مقدار $\cot x$ به سمت ۱ با مقادیر کم‌تر از ۱ نزدیک می‌شود. یعنی:

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{4})^+}[\cot x]=[1^-]=0$$



**B** **۵۴- گزینه‌ی (۴)** طبق نمودار $y=\tan x$ (یا دایره‌ی مثلثاتی)، وقتی $x\to 0^-$، $\tan x$ با مقادیر کم‌تر از صفر به صفر نزدیک می‌شود. بنابراین:

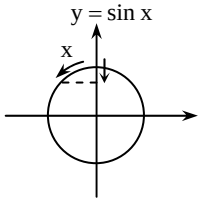



$$\lim_{x\to 0^-}\frac{[\tan x^3]}{\tan[x]}=\frac{[0^-]}{\tan[0^-]}=\frac{-1}{\tan(-1)}=\frac{-1}{-\tan 1}=\frac{1}{\tan 1}$$

دقت کنید که اگر $x\to 0^-$، آن‌گاه $x^3\to 0^-$ و $\tan x^3\to 0^-$.

**C** **۵۵- گزینه‌ی (۱)** در فاصله‌ی $0<x<1$ داریم: $[x]=0$، بنابراین در این فاصله مقدار تابع $[x]\cot x$، صفر مطلق است و تابع $[x]\cot[x]$ تعریف نشده است. پس حد اول برابر صفر است و حد دوم وجود ندارد.

**C** **۵۶- گزینه‌ی (۳)** می‌دانیم: $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$، حال داریم:




$$x\to(\frac{\pi}{2})^-\Rightarrow x<\frac{\pi}{2}\Rightarrow x+\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\xrightarrow[\text{مثلثاتی}]{\text{طبق دایره‌ی}}\sin(x+\frac{\pi}{4})>\sin(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4})$$

$$\Rightarrow\sin(x+\frac{\pi}{4})>\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})>1\Rightarrow\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-}[\sin x+\cos x]=[1^+]=1$$

**B** **۵۷- گزینه‌ی (۴)** وقتی $x\to 1$، داریم: $\frac{1}{x-1}\to\infty$ و $\sin^{-1}(\infty)$ وجود ندارد! درواقع همسایگی $x=1$ در دامنه‌ی تابع حضور ندارد، زیرا:

$$D_f:-1\le\frac{1}{x-1}\le 1\Rightarrow|\frac{1}{x-1}|\le 1\Rightarrow|x-1|\ge 1\Rightarrow x-1\ge 1 \text{ یا } x-1\le -1\Rightarrow x\ge 2 \text{ یا } x\le 0$$

**C** **۵۸- گزینه‌ی (۱)** در گزینه‌ی (۱)، وقتی $x\to\frac{\pi}{2}$، چه از چپ و چه از راست، داریم: $\sin x\to 1$ و $\sin x<1$، بنابراین $\sin x\to 1^-$ و مقدار حد برابر صفر می‌شود. در گزینه‌ی (۲)، دامنه‌ی تابع از شرط $-1\le 1-x\le 1$ به دست می‌آید، یعنی: $D_f=[0,2]$ و همسایگی چپ $x=0$ در دامنه حضور ندارد. در گزینه‌ی (۳) داریم:

$$\lim_{x\to 0^+}\tan^{-1}(\frac{1}{x})=\lim_{t\to+\infty}\tan^{-1}(t)=\frac{\pi}{2}\quad,\quad\lim_{x\to 0^-}\tan^{-1}(\frac{1}{x})=\lim_{t\to-\infty}\tan^{-1}(t)=-\frac{\pi}{2}$$

در گزینه‌ی (۴) نیز وقتی $x\to(\frac{3\pi}{2})^+$، داریم: $\cos x\to 0^+$ و در حالت $x\to(\frac{3\pi}{2})^-$، داریم: $\cos x\to 0^-$، پس مقدار حد راست و چپ $[\cos x]$ برابر صفر و $-1$ می‌شود.

**C** **۵۹- گزینه‌ی(۲)** گزینه‌ها را به‌ترتیب بررسی می‌کنیم:

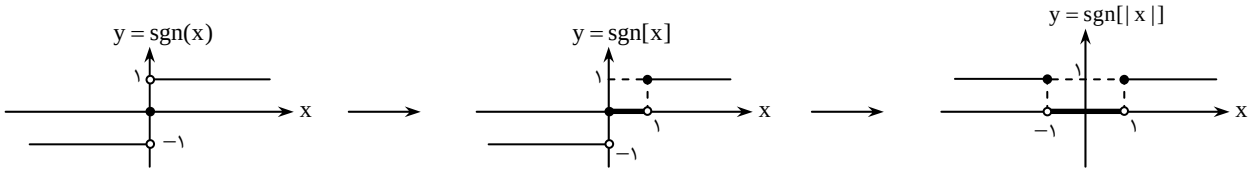
$$1)\ x\to 0^+\Rightarrow\frac{1}{x^2}\to+\infty\Rightarrow\lim_{x\to 0^+}\tan^{-1}(\frac{1}{x^2})=\lim_{t\to+\infty}\tan^{-1}(t)=\frac{\pi}{2}$$

$$3)\ x\to 0\Rightarrow\cos x\to 1^-\Rightarrow[\cos x]=0\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{[\cos x]}{|\sin x|}=\frac{\text{صفر مطلق}}{\text{صفر حدی}}=0$$

$$4)\ x\to 0^-\Rightarrow x^2\to 0^+\Rightarrow\lim_{x\to 0^-}\frac{[x^2]-\tan x}{\sin x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{0-\tan x}{\sin x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-1}{\cos x}=-1$$

۲) بازه‌ی $[0,1)$ که یک همسایگی راست صفر است، در دامنه‌ی تابع $\tan(\frac{\pi[x+1]}{2})$ قرار ندارد، زیرا در این بازه تابع به صورت $\tan\frac{\pi}{2}$ می‌شود که تعریف نشده است.

**C** **۶۰- گزینه‌ی(۲)** نمودار تابع را رسم می‌کنیم:




با توجه به نمودار، تابع در دو نقطه‌ی $x=\pm 1$ حد ندارد.

**C** **۶۱- گزینه‌ی (۱)** می‌دانیم برای هر $\alpha\in R$ داریم: $\alpha-1<[\alpha]\le\alpha$، بنابراین: $\frac{1}{x}-1<[\frac{1}{x}]\le\frac{1}{x}$، حال داریم:

$$\left.\begin{array}{ll}\text{اگر } x>0:\ x(\frac{1}{x}-1)<x[\frac{1}{x}]\le 1\quad, & \lim_{x\to 0^+}(1-x)=\lim_{x\to 0^+}1=1\xrightarrow{\text{فشردگی}}\lim_{x\to 0^+}x[\frac{1}{x}]=1\\ \text{اگر } x<0:\ x(\frac{1}{x}-1)>x[\frac{1}{x}]\ge 1\quad, & \lim_{x\to 0^-}(1-x)=\lim_{x\to 0^-}1=1\xrightarrow{\text{فشردگی}}\lim_{x\to 0^-}x[\frac{1}{x}]=1\end{array}\right\}\Rightarrow\lim_{x\to 0}x[\frac{1}{x}]=1$$

**D** **۶۲- گزینه‌ی (۱)** با استفاده از قضیه‌های حد داریم:

$$\lim_{x\to 0}(x^3+ax+b)[\frac{1}{x}]=\lim_{x\to 0}x^3[\frac{1}{x}]+\lim_{x\to 0}ax[\frac{1}{x}]+\lim_{x\to 0}b[\frac{1}{x}]$$

می‌دانیم $\lim_{x\to 0}[\frac{1}{x}]$ وجود ندارد، ولی $\lim_{x\to 0}x[\frac{1}{x}]=1$ و $\lim_{x\to 0}x^n[\frac{1}{x}]=0$ (برای $n\ge 2$). بنابراین اگر $b\neq 0$، حد فوق وجود ندارد، پس $b=0$ و داریم:

$$\text{مقدار حد}=0+a\Rightarrow a=4\Rightarrow a-b=4$$

**D** **۶۳- گزینه‌ی (۲)** وقتی $x\to\frac{1}{2}$، آن‌گاه $\frac{2x-1}{2}\to 0$، بنابراین اگر قرار دهیم $t=\frac{2x-1}{2}$ داریم:

$$\text{حد موردنظر}=\lim_{x\to 0/5}(2x-1)(x+1)[\frac{2}{2x-1}]=\lim_{x\to 0/5}2(x+1)\times\lim_{x\to 0/5}(\frac{2x-1}{2})[\frac{2}{2x-1}]=3\times\lim_{t\to 0}t[\frac{1}{t}]=3\times 1=3$$

**B** **۶۴- گزینه‌ی (۲)** باید دو دنباله‌ی $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ مثال بزنیم که $\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}a_n=0$، $a_n>0$ و $b_n<0$، در این صورت $\lim_{n\to\infty}f(a_n)=\lim_{n\to\infty}a_n=0$ و $\lim_{n\to\infty}f(b_n)=\lim_{n\to\infty}1=1$. گزینه‌ی (۲) چنین دنباله‌هایی را نشان می‌دهد، زیرا: $\lim_{n\to\infty}\frac{-1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2+n}=0$، $\frac{1}{2+n}>0$ و $\frac{-1}{n}<0$.

**C** **۶۵- گزینه‌ی (۱)** باید دو دنباله‌ی $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ مثال بزنیم که $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=1$، $a_n>1$ و $b_n<1$. در این صورت $\lim_{n\to\infty}f(a_n)=1$ و $\lim_{n\to\infty}f(b_n)=0$. برای این منظور دنباله‌های گزینه‌ی (۱) مناسب‌اند، زیرا $1-\frac{1}{n!}<1$، $1+\frac{1}{n!}>1$ و حد هر دو دنباله عدد ۱ است. در گزینه‌های (۳) و (۴) حد دنباله‌ها عدد ۱ نیست، و در گزینه‌ی (۲)، برای هر دو دنباله داریم: $a_n,b_n<1$

**C** **۶۶- گزینه‌ی(۳)** نشان می‌دهیم دنباله‌های گزینه‌ی (۳) دنباله‌هایی مناسب هستند.

$$\left.\begin{array}{l} a_n=\frac{1}{2n}\Rightarrow f(a_n)=\cos(2n\pi)=1\Rightarrow\lim_{n\to\infty}f(a_n)=1\\ b_n=\frac{1}{2n+1}\Rightarrow f(b_n)=\cos(2n\pi+\pi)=-1\Rightarrow\lim_{n\to\infty}f(b_n)=-1\end{array}\right\}\xrightarrow[\lim_{n\to\infty}f(a_n)\neq\lim_{n\to\infty}f(b_n)]{\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=0}\text{حد ندارد } x=0 \text{ در } f(x)$$

**C** **۶۷- گزینه‌ی (۳)** باید دو دنباله‌ی $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ مثال بزنیم که $\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}a_n=0$ و $\{a_n\}$ دنباله‌ای از اعداد گویا و $\{b_n\}$ دنباله‌ای از اعداد گنگ باشد، در این صورت $\lim_{n\to\infty}f(a_n)=1$، حال آن‌که $\lim_{n\to\infty}f(b_n)=-1$. دنباله‌های گزینه‌ی (۳) در این شرایط صدق می‌کنند.

**B** **۶۸- گزینه‌ی (۴)** از $\lim_{x\to 0}f(x)=0$ یا $\lim_{x\to 0^+}f(x)=0$ می‌توانیم نتیجه بگیریم: $\lim_{n\to\infty}f(\frac{1}{n})=0$، زیرا اگر برای دنباله‌ی $\{a_n\}$ داشته باشیم: $\lim_{n\to\infty}a_n=a$ و بدانیم $\lim_{x\to a}f(x)=L$، آن‌گاه $\lim_{n\to\infty}f(a_n)=L$، ولی برعکس این قضیه لزوماً درست نیست. اگر برای هر دنباله‌ی $\{a_n\}$ که $\lim_{n\to\infty}a_n=0$، داشته باشیم: $\lim_{n\to\infty}f(a_n)=0$، آن‌گاه گزینه‌ی (۱) درست می‌شود، ولی از فرض سؤال فقط می‌دانیم این شرط برای دنباله‌ی $a_n=\frac{1}{n}$ برقرار است. برای مثال نقض تابع زیر را در نظر بگیرید:

$$f(x)=\begin{cases}0 & x=\frac{1}{n},\ n\in N\\ x-1 & \text{در غیر این صورت}\end{cases}$$

**B** **۶۹- گزینه‌ی(۴)** طبق قضیه، از شرط صورت سؤال نتیجه می‌گیریم $\lim_{x\to a}f(x)=L$ و تعریف ریاضی این حکم در گزینه‌ی (۴) آمده است.

**C** **۷۰- گزینه‌ی(۴)** باید دنباله‌ای مثال بزنیم که $\lim_{n\to\infty}a_n=2$ و $a_n<2$. در این صورت: $\lim_{n\to\infty}f(a_n)=\lim_{x\to 2^-}f(x)=0$. دنباله‌های گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) در این شرط صدق نمی‌کنند. مثلاً برای گزینه‌ی (۲) داریم:

$$a_n=\frac{2n+5}{n+2}=\frac{2(n+2)+1}{n+2}=2+\frac{1}{n+2}\Rightarrow a_n>2$$

به همین ترتیب گزینه‌های (۱) و (۳) رد می‌شوند. ولی با نامساوی‌های برگشت‌پذیر زیر درستی گزینه‌ی (۴) ثابت می‌شود:

$$a_n<2\Leftrightarrow\sqrt{n^2+4n}-n<2\Leftrightarrow\sqrt{n^2+4n}<n+2\Leftrightarrow n^2+4n<n^2+4n+4\Leftrightarrow 0<4$$

**C** **۷۱- گزینه‌ی(۲)** با توجه به فرض $\lim_{n\to\infty}a_n=2$، ولی باید تعیین کنیم که $a_n\to 2^+$ یا $a_n\to 2^-$. داریم:

$$a_n=\frac{2n+1}{n+3}=\frac{2(n+3)-5}{n+3}=2-\frac{5}{n+3}\Rightarrow a_n<2\Rightarrow a_n\to 2^-\Rightarrow\lim_{n\to\infty}f(a_n)=\lim_{x\to 2^-}f(x)=(3\times 2+1)[4^-]=21$$

C **۷۲- گزینه‌ی(۴)** با توجه به فرض $\lim_{n\to\infty} a_n = ۰$ ، ولی $\lim_{n\to\infty} f(a_n) \neq \lim_{x\to ۰} f(x)$ . این دنباله واگرا است، زیرا دو زیردنباله با حدهای متفاوت دارد:

$$a_{۲n} = \frac{۱}{۲n+۱} \Rightarrow a_{۲n} \to ۰^+ \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(a_{۲n}) = \lim_{x\to ۰^+} f(x) = (۲\times ۰+۱)[۰^+] = ۰$$

$$a_{۲n+۱} = \frac{-۱}{۲n+۲} \Rightarrow a_{۲n+۱} \to ۰^- \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(a_{۲n+۱}) = \lim_{x\to ۰^-} f(x) = (۲\times ۰+۱)[۰^-] = -۱$$

C **۷۳- گزینه‌ی (۱)** دقت کنید که همسایگی چپ $x = ۰$ در دامنه‌ی تابع $y = \sin^{-۱}(\frac{۱}{x-۱})$ حضور دارد. حال داریم:

$$x \to ۰^- \Rightarrow |x| = -x \Rightarrow \lim_{x\to ۰^-} \frac{x^۲}{|x|} = \lim_{x\to ۰^-} (-x) = ۰ \quad , \quad \sin^{-۱}(\frac{۱}{x-۱}) \text{ کران‌دار } \Rightarrow \lim_{x\to ۰^-} \frac{x^۲}{|x|}\sin^{-۱}(\frac{۱}{x-۱}) = ۰$$

B **۷۴- گزینه‌ی (۱)** در نقطه‌ی $x = ۱$، تابع g از ضرب دو تابع حددار تشکیل شده و خود نیز حد دارد. در نقطه‌ی $x = \frac{۱}{۲}$، تابع g از ضرب یک تابع با حد صفر و یک تابع کران‌دار تشکیل شده و بنابراین حدی برابر صفر دارد. در نقاط دیگر g حد ندارد.

**تذکر:** برای اثبات جمله‌ی آخر به این دقت کنید که اگر در نقطه‌ی دیگری تابع g حد داشته باشد، تابع $y = \frac{g(x)}{۲x-۱}$ از تقسیم دو تابع حددار تشکیل شده (با حد غیر صفر در مخرج) و بنابراین خود حد دارد. ولی $y = f(x)$، و می‌دانیم تابع f در نقاط دیگر حد ندارد.

C **۷۵- گزینه‌ی (۲)** چون دامنه‌ی تابع h، $x \geq \frac{۳}{۲}$ است، پس همسایگی نقطه‌ی $x = ۱$ در دامنه‌ی تابع حضور ندارد. لذا برخلاف تست قبل، این‌بار h در $x = ۱$ حد ندارد. هم‌چنین با استدلالی مشابه تست قبل می‌توانید نتیجه بگیرید $\lim_{x\to(\frac{۳}{۲})^+} h(x) = ۰$ ، چون همسایگی چپ $x = \frac{۳}{۲}$ در دامنه‌ی تابع حضور ندارد، نتیجه می‌گیریم، $\lim_{x\to(\frac{۳}{۲})} h(x) = \lim_{x\to(\frac{۳}{۲})^+} h(x)$ . پس تابع h در $x = \frac{۳}{۲}$ حد دارد.

D **۷۶- گزینه‌ی (۳)** تابع در هیچ نقطه‌ای حد ندارد. فرض کنید در نقطه‌ی $x = a$ (که $a \neq ۱$) حدی برابر L داشته باشد، در این صورت اگر دنباله‌ی $\{a_n\}$ با فرض $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ را درنظر بگیریم، داریم: $\lim_{n\to\infty} i(a_n)f(a_n) = L$ . می‌دانیم برای هر عدد حقیقی مانند a، می‌توانیم دنباله‌ای از اعداد گویا مانند $\{a_n\}$ درنظر بگیریم که $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ . بنابراین: $i(a_n) = ۱$ و در نتیجه $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = L$ ، که مخالف فرض حد نداشتن f در نقطه‌ی $x = a$ است. تنها در $x = ۱$ نیاز به بررسی دیگری دارد، برای این نقطه دنباله‌ای از اعداد گنگ نیز مانند $\{b_n\}$ درنظر بگیرید که $\lim_{n\to\infty} b_n = ۱$ ، بنابراین $i(b_n) = ۰$ و در نتیجه $\lim_{n\to\infty} i(b_n)f(b_n) = ۰$ . چون باید این حد با $\lim_{n\to\infty} i(a_n)f(a_n) = L$ هم برابر باشد، نتیجه می‌گیریم $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = ۰$ که مخالف فرض $\lim_{x\to ۱} f(x) \neq ۰$ است.

B **۷۷- گزینه‌ی (۳)** می‌دانیم $\lim_{x\to -۱} \cos(\frac{۱}{x-۱}) = \cos(\frac{-۱}{۲})$ . پس a هر مقداری باشد، تابع f از ضرب دو تابع تشکیل شده که هر دو در $x = -۱$ حد دارند، بنابراین خود f نیز در این نقطه حد دارد.

B **۷۸- گزینه‌ی (۱)** در $x = ۱$ تابع $\cos(\frac{۱}{x-۱})$ حد ندارد، ولی در همسایگی آن کران‌دار است. بنابراین برای حد داشتن تابع f، باید حد عبارت $x^۳ + ax$ در $x = ۱$ برابر صفر شود. یعنی: $۱ + a = ۰$، که نتیجه می‌دهد: $a = -۱$

C **۷۹- گزینه‌ی (۱)** با استفاده از ضابطه‌ی f داریم: $\lim_{x\to ۱^+} f(x) = \lim_{x\to ۱^-} f(x) = ۰$ . بنابراین $\lim_{x\to ۱} f(x) = ۰$. حال چون تابع g یک تابع کران‌دار است، نتیجه می‌گیریم: $\lim_{x\to ۱} f(x)g(x) = ۰$

D **۸۰- گزینه‌ی(۲)** تابع $D(x)$ در هیچ نقطه‌ای حد ندارد، ولی کران‌دار است $(۰ \leq D(x) \leq ۱)$. بنابراین در نقاطی مانند $x = a$ که داشته باشیم $\lim_{x\to a}(x^۳ + ۴x - ۴) = ۰$ ، حد تابع f نیز برابر صفر خواهد شد، در غیر این‌صورت (یعنی اگر $\lim_{x\to a}(x^۳ + ۴x - ۴) = L \neq ۰$)، دو دنباله‌ی $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ با مقادیر گویا و گنگ یافت می‌شود که $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = a$ و داریم: $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = L$ و $\lim_{n\to\infty} f(b_n) = ۰$ ، بنابراین f در نقاط دیگر حد ندارد. عبارت $x^۳ + ۴x - ۴$ نیز فقط یک ریشه دارد (زیرا مشتق آن $۳x^۲ + ۴ > ۰$ است، بنابراین به یک تابع اکیداً صعودی درجه‌ی ۳ اشاره دارد که دقیقاً یک ریشه دارد)، بنابراین f در یک نقطه حد دارد.

C **۸۱- گزینه‌ی (۱)** با توجه به ضابطه برای همه‌ی مقادیر $x \in R$، داریم: $f(x) \in Q$. بنابراین:

$$(fof)(x) = f(f(x)) \xrightarrow{f(x)\in Q} f(f(x)) = ۲ \Rightarrow (fof)(x) : ۲ \text{ تابع ثابت با مقدار } \Rightarrow \lim_{x\to ۴}(fof)(x) = ۲$$

D **۸۲- گزینه‌ی(۴)** می‌دانیم $f(x)=[x]+[-x]=\begin{cases}-1 & x\notin Z\\ 0 & x\in Z\end{cases}$، حال می‌توانیم نشان دهیم که $f(g(x))$ در $x=0$ حد ندارد. دو دنباله‌ی $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ را از اعداد گویا و گنگ درنظر بگیرید که $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$ و $0<a_n,b_n<1$. در این صورت $g(a_n)=a_n^2\notin Z$ و $g(b_n)=0\in Z$، پس: $f(g(a_n))=-1$ و $f(g(b_n))=0$، یعنی: $\lim\limits_{n\to\infty}f(g(b_n))\neq\lim\limits_{n\to\infty}f(g(a_n))$، پس تابع $fog$ در $x=0$ حد ندارد.

D **۸۳- گزینه‌ی (۳)** تابع f در هیچ نقطه‌ای از R حد ندارد، ولی کران‌دار است. پس در مواردی که $\lim\limits_{x\to a}[x-3]=0$، تابع g در نقطه‌ی $x=a$ حد دارد. برای $3\le x<4$ داریم: $g(x)=0$ و بنابراین تابع g در همه‌ی نقاط $x\in(3,4)$ حد دارد. نقطه‌ی مرزی $x=3$ را باید جداگانه بررسی کنیم. در این نقطه داریم: $\lim\limits_{x\to3^+}g(x)=0$ (چرا؟)، ولی $\lim\limits_{x\to3^-}g(x)$ وجود ندارد، زیرا دو دنباله‌ی $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ از اعداد گویا و گنگ می‌توان نوشت که $a_n<3$، $b_n<3$ و $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=3$. بنابراین: $\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)=4$ و $\lim\limits_{n\to\infty}f(b_n)=-1$. حال چون $\lim\limits_{x\to3^-}[x-3]=-1$، داریم: $\lim\limits_{n\to\infty}g(a_n)=-4$ و $\lim\limits_{n\to\infty}g(b_n)=1$، پس تابع g در نقطه‌ی $x=3$ حد چپ ندارد.

C **۸۴- گزینه‌ی (۲)** اگر در نقطه‌ای مانند $x=a$ داشته باشیم $a^2=2-a$، تابع f در این نقطه حد دارد و در غیر این صورت حد ندارد. برای اثبات فرض کنید که در نقطه‌ای مانند $x=a$ داشته باشیم $a^2\neq2-a$. در این صورت دو دنباله‌ی $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ را درنظر بگیرید که اولی کاملاً از اعداد گویا باشد و دومی از اعداد گنگ و داشته باشیم $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=a$. در این صورت: $\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)=a^2$ و $\lim\limits_{n\to\infty}f(b_n)=2-a$، پس از شرط $a^2\neq2-a$ نتیجه می‌گیریم: $\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)\neq\lim\limits_{n\to\infty}f(b_n)$. بنابراین تابع f در این نقطه حد ندارد. به همین ترتیب می‌توان نشان داد که در نقاطی که $a^2=2-a$، شرط حد دنباله‌ای برقرار است و تابع حد دارد. بنابراین:

$$a^2=2-a\Rightarrow a^2+a-2=0\Rightarrow(a+2)(a-1)=0\Rightarrow a=-2\ ,\ a=1\Rightarrow$$ تابع در دو نقطه حد دارد

C **۸۵- گزینه‌ی (۲)** با توجه به فرض $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=2$، ولی برای یافتن $\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)$ باید تعیین کنیم که $a_n\to2^-$ یا $a_n\to2^+$. داریم:

$$a_n=\frac{4n+1}{2n+1}=\frac{2(2n+1)-1}{2n+1}=2-\frac{1}{2n+1}\Rightarrow a_n<2\Rightarrow a_n\to2^-\Rightarrow\lim_{n\to\infty}f(a_n)=\lim_{x\to2^-}f(x)=b+[4^-]=b+3$$

$$\xrightarrow[\text{فرض}]{\lim\limits_{x\to\infty}f(a_n)=1}b+3=1\Rightarrow b=-2$$

A **۸۶- گزینه‌ی (۲)** حدهای چپ و راست را جداگانه حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=1+2a\qquad,\qquad\lim_{x\to1^-}f(x)=a-1\xrightarrow{\text{فرض}}1+2a-a+1=-1\Rightarrow a=-3$$

B **۸۷- گزینه‌ی (۳)** چون $x^3-x=x(x^2-1)$، وقتی $x\to0^-$، عبارت $x^3-x$ از ضرب دو عبارت منفی تشکیل شده است. بنابراین $x^3-x\to0^+$ و باید حاصل $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$ را بیابیم. با توجه به ضابطه‌ی تابع داریم:

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\sqrt{1-x}=1$$

C **۸۸- گزینه‌ی (۳)** می‌دانیم $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$ و چون $a_n=1+\frac{1}{n}$ داریم $a_n\to1^+$ (وقتی $n\to\infty$). به این ترتیب برای پیدا کردن $\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)$ باید $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)$ را پیدا کنیم:

$$x\to1^+\Rightarrow-x\to(-1)^-\Rightarrow[-x]=-2\Rightarrow\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{2x-2}{x^2-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{2(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{2}{1+1}=1$$

B **۸۹- گزینه‌ی (۴)** با توجه به فرض $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=2$. هم‌چنین چون $f(x)=\sqrt{(x-2)(x+1)}$ تابع f به ازای $x\ge2$ یا $x\le-1$ تعریف شده است، پس برای آن‌که دنباله‌ی $\{f(a_n)\}$ همگرا باشد باید $a_n\to2^+$ (زیرا اگر $a_n<2$، $a_n$ در دامنه‌ی تابع قرار دارند). حال جمله‌ی عمومی دنباله را به‌صورت زیر می‌توانیم بنویسیم:

$$a_n=\frac{2(n^2+3n)+b-6n}{n^2+3n}=2+\frac{b-6n}{n^2+3n}\Rightarrow a_n-2=\frac{b-6n}{n^2+3n}$$

وقتی $n\to\infty$ داریم $a_n-2\sim\frac{-6n}{n^2}$، پس $a_n-2\to0^-$، بنابراین همواره $a_n\to2^-$ و به ازای هیچ مقدار b شرط $a_n\to2^+$ رخ نمی‌دهد.

B **۹۰- گزینه‌ی (۲)** با توجه به فرض $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = ۴$ . ولی برای یافتن $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)$ باید تعیین کنیم که $a_n \to ۴^+$ یا $a_n \to ۴^-$ . داریم:

$$a_n = \frac{۴(n+۲)-۱۱}{n+۲} = ۴ - \frac{۱۱}{n+۲} \Rightarrow a_n < ۴ \Rightarrow a_n \to ۴^-$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{x\to ۴^-} f(x) = \frac{\text{صفر مطلق}}{\text{صفر حدی}} = ۰$$

B **۹۱- گزینه‌ی (۴)** با توجه به فرض به ازای $n$ های زوج و فرد می‌توانیم دو زیردنباله برای دنباله‌ی $\{a_n\}$ در نظر بگیریم:

$$n = ۲k \Rightarrow a_{۲k} = \frac{۱}{۴k} \Rightarrow f(a_{۲k}) = |[\frac{۱}{۸k}]| \Rightarrow \lim_{k\to\infty} f(a_{۲k}) = |[۰^+]| = ۰$$

$$n = ۲k-۱ \Rightarrow a_{۲k-۱} = \frac{-۱}{۲(۲k-۱)} \Rightarrow f(a_{۲k-۱}) = |[\frac{-۱}{۴(۲k-۱)}]| \Rightarrow \lim_{k\to\infty} f(a_{۲k-۱}) = |[۰^-]| = ۱$$

بنابراین دنباله‌ی $\{f(a_n)\}$ شامل دو زیردنباله با حدهای متفاوت است، در نتیجه همگرا نیست.

سایت ریاضی سرا
WWW.RIAZISARA.IR